Automatismes en calcul, semaine du 16 septembre

15 septembre 2024

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$

- Factoriser au maximum $a^2 b - b^3$

- Factoriser au maximum $a^3 - b^3$

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$

- Factoriser au maximum $a^2 b - b^3$

$$a^2 b - b^3 = b(a^2 - b^2) = b(a+b)(a-b)$$

- Factoriser au maximum $a^3 - b^3$

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$

- Factoriser au maximum $a^2b - b^3$

  $a^2b - b^3 = b(a^2 - b^2) = b(a+b)(a-b)$

- Factoriser au maximum $a^3 - b^3$

  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

- Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$

- Calculer une expression de $\left(\dfrac{1}{\tan}\right)'$

- Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2-\ln(x)}{2x\sqrt{x}}$$

- Calculer une expression de $\left(\dfrac{1}{\tan}\right)'$

- Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2-\ln(x)}{2x\sqrt{x}}$$

- Calculer une expression de $\left(\dfrac{1}{\tan}\right)'$

$$\left(\frac{1}{\tan}\right)' = -\tan'\frac{1}{\tan^2} = -\frac{1+\tan^2}{\tan^2} = -1 - \left(\frac{1}{\tan}\right)^2$$

- Soit $z = 3\mathrm{i} - 3$. Donner $\overline{z}$, $|z|$ et, si possible, $\mathrm{Arg}(z)$

- Déterminer $(\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i})^{10}$

- Soit $z = 3\mathrm{i} - 3$. Donner $\overline{z}$, $|z|$ et, si possible, $\mathrm{Arg}(z)$

  $$\overline{z} = -3\mathrm{i} - 3,\ |z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},\ \mathrm{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$$

- Déterminer $(\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i})^{10}$

- Soit $z = 3\mathrm{i} - 3$. Donner $\overline{z}$, $|z|$ et, si possible, $\mathrm{Arg}(z)$

$$\overline{z} = -3\mathrm{i} - 3,\ |z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},\ \mathrm{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$$

- Déterminer $(\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i})^{10}$

$$(\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i})^{10} = \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = 2^{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{10\pi}{4}} = 1024\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -1024\mathrm{i}$$

On travaille sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

- Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{2}{5x} + x^2$

- Donner une primitive de $g(x) = \cos^2(x)$

On travaille sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

- Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{2}{5x} + x^2$

  $F(x) = \dfrac{2}{5}\ln(x) + \dfrac{1}{3}x^3$ convient.

- Donner une primitive de $g(x) = \cos^2(x)$

On travaille sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

- Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{2}{5x} + x^2$

  $F(x) = \dfrac{2}{5}\ln(x) + \dfrac{1}{3}x^3$ convient.

- Donner une primitive de $g(x) = \cos^2(x)$

  $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \iff g(x) = \dfrac{1}{2}(\cos(2x) + 1).$

  On déduit que $G(x) = \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{x}{2}$ convient.