Automatismes en calcul, semaine du 24 février

24 février 2025

Lundi : trouver des bases

Mercredi : libre ou liée ?

Vendredi : interro de cours

Trouver des bases de $A = \{(x; y) \in \mathbb{K}^2 \ / \ 3x = 2y\}$ et
$B = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{K}^4 \ / \ x + y = z + t\}$.

Trouver des bases de $A = \{(x; y) \in \mathbb{K}^2 \ / \ 3x = 2y\}$ et $B = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{K}^4 \ / \ x + y = z + t\}$.

- Les éléments de A sont de la forme $(x; \frac{3}{2}x) = x(1; \frac{3}{2})$ donc $A = \mathrm{Vect}((1; \frac{3}{2}))$.
  $((1; \frac{3}{2}))$ est génératrice de A et libre (car ?), c'est donc une base de A.

Trouver des bases de $A = \{(x; y) \in \mathbb{K}^2 \ / \ 3x = 2y\}$ et
$B = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{K}^4 \ / \ x + y = z + t\}$.

- Les éléments de A sont de la forme $(x; \frac{3}{2}x) = x(1; \frac{3}{2})$ donc $A = \mathrm{Vect}((1; \frac{3}{2}))$.
  $((1; \frac{3}{2}))$ est génératrice de A et libre (car ?), c'est donc une base de A.
- Les éléments de B sont de la forme :
  $(x; y; z; x + y - z) = x(1; 0; 0; 1) + y(0; 1; 0; 1) + z(0; 0; 1; -1)$
  donc $B = \mathrm{Vect}((1; 0; 0; 1); (0; 1; 0; 1); (0; 0; 1; -1))$.
  La famille est génératrice de B. On vérifie qu'elle est libre (pas moyen de le dire directement car il y a > 2 vecteurs) c'est donc une base de B.

$((3n+2)_n ; (5n+1)_n ; (-n+7)_n)$ et $(x \mapsto \sin(x^k))_{k \in [\![1;100]\!]}$ sont-elles libres ou liées ?

$((3n+2)_n ; (5n+1)_n ; (-n+7)_n)$ et $(x \mapsto \sin(x^k))_{k\in[\![1;100]\!]}$ sont-elles libres ou liées ?

- On travaille avec des suites.
  $\alpha(3n+2)_n + \beta(5n+1)_n + \gamma(-n+7)_n = 0$
  $\iff \forall n,\ n(3\alpha+5\beta-\gamma) + 2\alpha+\beta+7\gamma = 0$
  $\iff \begin{cases} 2\alpha+\beta-7\gamma = 0 \\ 3\alpha+5\beta-\gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} \infty\text{té} \\ \text{de solutions} \end{array} : \text{liée !}$
  On pouvait répondre plus vite. Comment ?

$((3n+2)_n ; (5n+1)_n ; (-n+7)_n)$ et $(x \mapsto \sin(x^k))_{k \in [\![1;100]\!]}$ sont-elles libres ou liées ?

- On travaille avec des suites.
  $$\alpha(3n+2)_n + \beta(5n+1)_n + \gamma(-n+7)_n = 0$$
  $$\iff \forall n,\ n(3\alpha+5\beta-\gamma) + 2\alpha+\beta+7\gamma = 0$$
  $$\iff \begin{cases} 2\alpha+\beta-7\gamma = 0 \\ 3\alpha+5\beta-\gamma \end{cases} \implies \begin{array}{c} \infty\text{té} \\ \text{de solutions} \end{array} : \text{ liée !}$$
  On pouvait répondre plus vite. Comment ?
- On a 100 vecteurs dans un espace de fonction, pas question d'avoir un système !

$((3n+2)_n ; (5n+1)_n ; (-n+7)_n)$ et $(x \mapsto \sin(x^k))_{k \in [\![1;100]\!]}$ sont-elles libres ou liées ?

- On travaille avec des suites.
  $\alpha(3n+2)_n + \beta(5n+1)_n + \gamma(-n+7)_n = 0$
  $\iff \forall n,\ n(3\alpha + 5\beta - \gamma) + 2\alpha + \beta + 7\gamma = 0$
  $\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta - 7\gamma = 0 \\ 3\alpha + 5\beta - \gamma \end{cases} \implies \begin{matrix} \infty\text{té} \\ \text{de solutions} \end{matrix} \ :\ \text{liée !}$
  On pouvait répondre plus vite. Comment ?
- On a 100 vecteurs dans un espace de fonction, pas question d'avoir un système !
  Supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} \lambda_i f_i = 0$ Supposons que la CL soit non triviale et notons $k = \min(i / \lambda_i \neq 0)$. On a $\lambda_k f_k = -\sum_{i=k+1}^{100} \lambda_i f_i$ et c'est absurde... Pourquoi ?

test