Automatismes en calcul, semaine du 24 mars

28 mars 2025

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Lundi : limite

Jeudi : exprimer en fonction de $n > 0$ les sommes suivantes

Vendredi : équation différentielle d'ordre 1 avec variation de la constante.

Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\sin(\frac{1}{n^2})\right)^{\sqrt{n}}$.

Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\sin(\frac{1}{n^2})\right)^{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned}
\left(1-\sin(\frac{1}{n^2})\right)^{\sqrt{n}} &= \exp\left(\sqrt{n}\ln(1-\sin(\frac{1}{n^2}))\right)\\
&\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n}\ln(1-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\right)\\
&\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n}\times(-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\right)\\
&\underset{+\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\sin(\frac{1}{n^2})\right)^{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned}\left(1-\sin(\frac{1}{n^2})\right)^{\sqrt{n}} &= \exp\left(\sqrt{n}\ln(1-\sin(\frac{1}{n^2}))\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n}\ln(1-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n}\times(-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\right)\\ &\underset{+\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Des exemples de la FI « 1^{∞} » qui tendent vers 1 et $+\infty$?

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2).$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ (en faisant apparaître un téléscopage)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.

$$\forall n > 0,\ \sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n}.$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ (en faisant apparaître un téléscopage)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.

$$\forall n > 0,\ \sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n}.$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ (en faisant apparaître un téléscopage)

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}((k+1)-1) \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} k! - \sum_{k=1}^{n} k! = \boxed{(n+1)! - 1}$$

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable. On a :

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^2 \Leftrightarrow \lambda'(x) = x \Leftarrow \lambda(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3$ est donc une solution particulière.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable. On a :

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^2 \Leftrightarrow \lambda'(x) = x \Leftarrow \lambda(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3$ est donc une solution particulière.

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = \lambda x + \frac{1}{2}x^3, \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$