Automatismes en calcul, semaine du 27 janvier

26 janvier 2025

classes préparatoires scientifiques
Lycée Brizeux

- $$\sum_{1 \leq i,j \leq n} i^2 j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i^2 j = \sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \boxed{\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}}$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $$\sum_{1 \leq i,j \leq n} i^2 j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i^2 j = \sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \boxed{\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}}$$

- $$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} i + j = \sum_{i=1}^{n} i(n-i+1) + \frac{(n+i)(n-i+1)}{2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} + i(n+\frac{3}{2}) - \frac{3}{2} i^2$$
$$= \boxed{\frac{n(n+1)^2}{2}} \text{ (après calculs)}$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ puis donner une primitive de f sur $]-1;1[$.

Calculer $I_1 = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$.

Calculer $I_1 = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$.

- Par parties, on trouve $I_1 = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})$.

Calculer $I_1 = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$.

- Par parties, on trouve $I_1 = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})$.
- En faisant le changement de variable $\varphi(t) = \ln(t^2+1)$ on a :
  $I_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$
  $= 2\left[\mathrm{Arctan}(t)\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \boxed{= \frac{\pi}{6}}$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux