Automatismes en calcul, semaine du 27 mai

27 mai 2024

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3(2x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x \qquad ; \qquad I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3(2x)\sin(3x)\mathrm{d}x \qquad ; \qquad I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x$$

- $\cos^3(2x)\sin(3x) = \frac{1}{16\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x})^3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x})$

$$= \frac{1}{8}(\sin(9x) - \sin(3x) + 3\sin(5x) + 3\sin(x)$$

donc

$$I_1 = \frac{1}{8}\left[-\frac{\cos(9x)}{9} + \frac{\cos(3x)}{3} - \frac{3\cos(5x)}{5} - \cos(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{15}{36}.$$

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3(2x)\sin(3x)\mathrm{d}x \qquad ; \qquad I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x$$

- $$\cos^3(2x)\sin(3x) = \frac{1}{16\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x})^3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x})$$
$$= \frac{1}{8}(\sin(9x)-\sin(3x)+3\sin(5x)+3\sin(x))$$

donc

$$I_1 = \frac{1}{8}\left[-\frac{\cos(9x)}{9}+\frac{\cos(3x)}{3}-\frac{3\cos(5x)}{5}-\cos(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{15}{36}.$$

- $$I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = [-\ln(\cos(x))]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2})$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{k^2}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}k(\frac{1}{2})^{k-1} \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{k^2}{n}}$$

- $\forall x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{n}x^k\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k-1\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

donc, pour $x=\frac{1}{2}$, on trouve que la première limite est 4.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^{k-1} \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{k^2}{n}}$$

- $\forall x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{n}x^k\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k - 1\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

donc, pour $x = \frac{1}{2}$, on trouve que la première limite est 4.

Tout est ok ?

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{k^2}{n}}$$

- $\forall x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{n}x^k\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k-1\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

donc, pour $x=\frac{1}{2}$, on trouve que la première limite est 4.
Souci : intervertion limite et dérivation. Comment le lever ?

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{k^2}{n}}$$

- $\forall x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{n}x^k\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k - 1\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

donc, pour $x=\frac{1}{2}$, on trouve que la première limite est 4.

Souci : intervertion limite et dérivation. Comment le lever ?

Passer par les sommes partielles... ou se servir du programme de spé ;-)

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k(\frac{1}{2})^{k-1} \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{k^2}{n}}$$

- $\forall x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k - 1\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

donc, pour $x = \frac{1}{2}$, on trouve que la première limite est 4.
Souci : intervertion limite et dérivation. Comment le lever ?
Passer par les sommes partielles... ou se servir du programme de spé ;-)

- on reconnait une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{k^2}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

Soit u définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3 \end{array}\right.$.

Exprimer u_n en fonction de n.

Soit u définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3 \end{cases}$.

Exprimer u_n en fonction de n.

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode.

Soit u définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3 \end{cases}$.

Exprimer u_n en fonction de n.

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode.

$f(x) = 5x - 3$ a pour point fixe $r = \frac{3}{4}$. La suite $v = u - r$ est géométrique de raison 5 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - r = 5^n(u_0 - r) \iff u_n = 5^n(u_0 - r) + r$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{5^{n+1} + 3}{4}$$