Automatismes en calcul, semaine du 2 décembre

7 décembre 2024

- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{4n^2 + n} - 2n$

- $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{4n^2 + n} - 2n$

  $\forall n > 0,\ \sqrt{4n^2 + n} - 2n = \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} \to \frac{1}{4}$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+n}-2n$

  $\forall n>0,\ \sqrt{4n^2+n}-2n = \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} \to \frac{1}{4}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

  $\forall n>0,\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$.

  Or, $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc, avec $x=\frac{1}{n}$ on a $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et

$$\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{n\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\times\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$$

- $x^5 - y^5$

- $\cos(3x) + \cos(5x)$

- $x^5 - y^5$

  C'est une formule du cours :

  $$x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4).$$

- $\cos(3x) + \cos(5x)$

- $x^5 - y^5$

  C'est une formule du cours :

  $$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4).$$

- $\cos(3x) + \cos(5x)$

  On utilise l'angle moitié :

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $x^5 - y^5$

  C'est une formule du cours :

$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4).$$

- $\cos(3x) + \cos(5x)$

  On utilise l'angle moitié :

$$\begin{aligned} \cos(3x) + \cos(5x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}5x}) \\ &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} 2\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\cos(4x). \end{aligned}$$

Faire l'étude complète de $f(x) = 3^{\cos(x)}$.

Faire l'étude complète de $f(x) = 3^{\cos(x)}$.

$f(x) = 3^{\cos(x)} = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(3)}$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est paire et 2π périodique : il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$.

Faire l'étude complète de $f(x) = 3^{\cos(x)}$.

$f(x) = 3^{\cos(x)} = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(3)}$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est paire et 2π périodique : il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x)\ln(3)\mathrm{e}^{\cos(x)\ln(3)}$.
qui est du signe de $-\sin(x)$; f est donc décroissante sur $[0;\pi]$.

Faire l'étude complète de $f(x) = 3^{\cos(x)}$.

$f(x) = 3^{\cos(x)} = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(3)}$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est paire et 2π périodique : il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x)\ln(3)\mathrm{e}^{\cos(x)\ln(3)}$.
qui est du signe de $-\sin(x)$; f est donc décroissante sur $[0;\pi]$.

On a : $f(0) = 3,\ f(\pi) = \frac{1}{3}$