

Automatismes en calcul, semaine du 30 septembre

6 octobre 2024

Résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 7 \\ 5x \quad \quad + 7z = 3 \end{cases} .$$

$$\text{Résoudre le système } (S) : \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 7 \\ 5x \quad \quad + 7z = 3 \end{cases} .$$

Lorsqu'on a compris la méthode de Gauss, on voit qu'on peut l'appliquer de plusieurs façons différentes. Le but est alors de limiter les calculs

$$(S) \begin{matrix} \iff \\ L_1 \leftarrow -L_1 \end{matrix} \begin{cases} y - 3x - 2z = -1 \\ 2y + 2x + z = 7 \\ 5x + 7z = 3 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} y - 3x - 2z = -1 \\ 8x + 5z = 9 \\ 5x + 7z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \iff \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2 \end{matrix} \begin{cases} y - 3x - 2z = -1 \\ x + \frac{5}{8}z = \frac{9}{8} \\ 5x + 7z = 3 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{matrix} \begin{cases} y - 3x - 2z = -1 \\ x + \frac{5}{8}z = \frac{9}{8} \\ \frac{31}{8}z = -\frac{21}{8} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -1 + 3x + 2z \\ x = \frac{9}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{21}{31} \\ z = -\frac{21}{31} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{71}{31} \\ x = \frac{48}{31} \\ z = -\frac{21}{31} \end{cases}$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

- ▶ C'est une FI qui fait penser à une limite de référence du cours.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \times x = 0 \text{ car } \frac{\sin(u)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

▶ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \times x = 0$ car $\frac{\sin(u)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$

▶ Il faut savoir ce que signifie x^x .

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \times x = 0 \text{ car } \frac{\sin(u)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln(x)} = e^0 = 1 \quad (\text{car } x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0)$$

Dériver $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ et $g(x) = x^x$

Dériver $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ et $g(x) = x^x$

- f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x > 0, f'(x) = \sin'(\sqrt{x}) \times \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

Dériver $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ et $g(x) = x^x$

- f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x > 0, f'(x) = \sin'(\sqrt{x}) \times \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

- $g(x) = e^{x \ln(x)}$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x > 0, g'(x) = \exp'(x \ln(x)) \times \frac{d}{dx}(x \ln(x)) = x^x (\ln(x) + 1)$$

$$\text{Calculer } S_1 = \sum_{k=5}^{102} 3 + 5k \text{ et } S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i + j$$

$$\text{Calculer } S_1 = \sum_{k=5}^{102} 3 + 5k \text{ et } S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i + j$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright S_1 &= 3 \sum_{k=5}^{102} 1 + 5 \sum_{k=5}^{102} k = 3 \times 98 + 5 \times \frac{98 \times 107}{2} \\ &= 294 + 5 \times 49 \times 107 = 26509. \end{aligned}$$

$$\text{Calculer } S_1 = \sum_{k=5}^{102} 3 + 5k \text{ et } S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i + j$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright S_1 &= 3 \sum_{k=5}^{102} 1 + 5 \sum_{k=5}^{102} k = 3 \times 98 + 5 \times \frac{98 \times 107}{2} \\ &= 294 + 5 \times 49 \times 107 = 26509. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright S_2 &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + j \right) = \sum_{j=n}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + j \times (j-1) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1) \right) = \frac{3}{2} \sum_{j=1}^n j^2 - j \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} \end{aligned}$$