Automatismes en calcul, semaine du 3 février

2 février 2025

classes préparatoires scientifiques
Lycée Brizeux

Lundi : fractions rationnelles et applications

Mardi : calculer dans $\mathbb{C}$

Jeudi : techniques trigo pas vues depuis un moment...

Vendredi : inverser des matrices

Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

- On décompose $\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ en éléments simples :

Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

- On décompose $\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \qquad (k \notin \{-2;\ -3\})$$

Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

- On décompose $\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \qquad (k \notin \{-2;\ -3\})$$

- On fait apparaître un téléscopage :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3}$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

- On décompose $\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \qquad (k \notin \{-2;\ -3\})$$

- On fait apparaître un téléscopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} \\
&= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+3} \frac{1}{k} \\
&= \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}}
\end{aligned}$$

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+2i)$ et $B(-3i)$. Déterminer les points C tels que ABC soit rectangle en C.

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+2i)$ et $B(-3i)$. Déterminer les points C tels que ABC soit rectangle en C.

Une idée toujours bonne est de commencer par...

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+2i)$ et $B(-3i)$. Déterminer les points C tels que ABC soit rectangle en C.

On cherche les points du cercle de diamètre $[AB]$.

Notons $z_C = x + iy$.

ABC est rectangle en C ssi $AC^2 + BC^2 = AB^2 \;:\; (\star)$. On a :
$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |x + iy - (1+2i)|^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$
$BC^2 = x^2 + (y+3)^2$ et $AB^2 = 26$.

Il suit : $(\star) \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + (y+3)^2 = 26$

$$\iff x^2 - x + y^2 + y = 6 \iff \boxed{(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{13}{2}}$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+2i)$ et $B(-3i)$. Déterminer les points C tels que ABC soit rectangle en C.

On cherche les points du cercle de diamètre $[AB]$.

Notons $z_C = x + iy$.

ABC est rectangle en C ssi $AC^2 + BC^2 = AB^2 \;:\; (\star)$. On a :
$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |x + iy - (1+2i)|^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$
$BC^2 = x^2 + (y+3)^2$ et $AB^2 = 26$.

Il suit : $(\star) \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + (y+3)^2 = 26$

$\iff x^2 - x + y^2 + y = 6 \iff \boxed{(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{13}{2}}$

Où est l'erreur ?

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+2i)$ et $B(-3i)$. Déterminer les points C tels que ABC soit rectangle en C.

On cherche les points du cercle de diamètre $[AB]$.

Notons $z_C = x + iy$.

ABC est rectangle en C ssi $AC^2 + BC^2 = AB^2$: $(\star)$. On a :
$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |x + iy - (1+2i)|^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$
$BC^2 = x^2 + (y+3)^2$ et $AB^2 = 26$.

Il suit : $(\star) \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + (y+3)^2 = 26$

$\iff x^2 - x + y^2 + y = 6 \iff \boxed{(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{13}{2}}$

Il faut retirer les points A et B.

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- Factoriser $\cos(5x) - \cos(x)$.

- Délinéariser $\cos(3x)$

- Factoriser $\cos(5x) - \cos(x)$.

  Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\begin{aligned}\cos(5x) - \cos(x) &= \mathrm{Re}(e^{i5x} - e^{ix}) = \mathrm{Re}(e^{i3x}(e^{i2x} - e^{i2x})) \\ &= \mathrm{Re}(e^{i3x} 2i\sin(2x)) \boxed{= -2\sin(2x)\sin(3x)}\end{aligned}$$

- Délinéariser $\cos(3x)$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- Factoriser $\cos(5x) - \cos(x)$.

  Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\begin{aligned}\cos(5x) - \cos(x) &= \mathrm{Re}(e^{i5x} - e^{ix}) = \mathrm{Re}(e^{i3x}(e^{i2x} - e^{i2x})) \\ &= \mathrm{Re}(e^{i3x} 2i \sin(2x)) \boxed{= -2\sin(2x)\sin(3x)}\end{aligned}$$

- Délinéariser $\cos(3x)$

  Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{i3x}) = \mathrm{Re}((e^{ix})^3) = \mathrm{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^3)$$
  $$= \mathrm{Re}(\cos(x)^3 + 3\cos(x)^2 i \sin(x) - 3\cos(x)\sin(x)^2 - i\sin(x)^3)$$
  $$\boxed{= \cos(x)^3 - 3\cos(x)\sin(x)^2}$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.