Automatismes en calcul, semaine du 3 juin

2 juin 2024

- Résoudre $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

- Résoudre $3\cos(x) = 5\sin(x)$.

- Résoudre $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=0$.

  $\forall x,\ \cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}(2\cos(x)+1))=(2\cos(x)+1)\cos(2x)$

  $(2\cos(x)+1)\cos(2x)=0 \iff x\in\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\}\cup\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\}$

- Résoudre $3\cos(x)=5\sin(x)$.

- Résoudre $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=0$.

  $\forall x,\ \cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}(2\cos(x)+1))=(2\cos(x)+1)\cos(2x)$

  $(2\cos(x)+1)\cos(2x)=0 \iff x\in\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\}\cup\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\}$

- Résoudre $3\cos(x)=5\sin(x)$.

  $\forall x,\ 3\cos(x)-5\sin(x)=\sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\cos(x)-\frac{5}{\sqrt{34}}\sin(x)\right)$

  $=\sqrt{34}\cos\left(x+\mathrm{Arccos}(\frac{3}{\sqrt{34}})\right)$. Il suit que :

  $$3\cos(x)=5\sin(x)\iff x\in\left\{\frac{\pi}{2}+\mathrm{Arccos}(\frac{3}{\sqrt{34}})+k\pi\right\}$$

  (Il manque l'indication $k\in\mathbb{Z}$ dans chaque ensemble).

- Factoriser au maximum $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = 0$.

- Trouver tous les x, y tels que $x + y = 5$ et $xy = 4$.

- Factoriser au maximum $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = 0$.

  Ca fait penser aux racines $n^{\text{è}}$, comment forcer leur apparition ?

- Trouver tous les x, y tels que $x + y = 5$ et $xy = 4$.

- Factoriser au maximum $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = 0$.

  Ca fait penser aux racines $n^{\text{è}}$, comment forcer leur apparition ? Les 4 racines 5è de 1 différentes de 1 sont racines du polynôme, comme il est de degré 4 il est scindé et vaut $\prod_{k \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}} (X - k)$.

- Trouver tous les x, y tels que $x + y = 5$ et $xy = 4$.

- Factoriser au maximum $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = 0$.

  Ca fait penser aux racines $n^{\text{è}}$, comment forcer leur apparition ? Les 4 racines 5è de 1 différentes de 1 sont racines du polynôme, comme il est de degré 4 il est scindé et vaut $\prod_{k \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}} (X - k)$.

- Trouver tous les x, y tels que $x + y = 5$ et $xy = 4$.

  x et y sont les racines de $(Z - x)(Z - y) = Z^2 - 5Z + 4$, ce sont les nombres 4 et 1. (Il y a donc deux couples possibles).

  C'est mal rédigé : quel est le type de raisonnement utilisé ?

Sans calcul, dire si les matrices sont inversibles ($x \in \mathbb{R}^*$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 1 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sans calcul, dire si les matrices sont inversibles ($x \in \mathbb{R}^*$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 1 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Elle n'est pas carrée : non.

Sans calcul, dire si les matrices sont inversibles ($x \in \mathbb{R}^*$).

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ \frac{1}{x} & 1 & x\\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 1\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

- Elle n'est pas carrée : non.
- Son rang est 1 : non.

Sans calcul, dire si les matrices sont inversibles ($x \in \mathbb{R}^*$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 1 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Elle n'est pas carrée : non.
- Son rang est 1 : non.
- Son rang est 1 : non.

Sans calcul, dire si les matrices sont inversibles ($x \in \mathbb{R}^*$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 1 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Elle n'est pas carrée : non.
- Son rang est 1 : non.
- Son rang est 1 : non.
- Oui : les colonnes forment une famille libre