# Automatismes en calcul, semaine du 3 mars

6 mars 2025

Lundi : une équation différentielle

Mardi : Interrogation de cours

Jeudi : développement limité

Vendredi : application des DL

Résoudre $S'' + S' + S = \mathrm{e}^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

---

Résoudre $S'' + S' + S = \mathrm{e}^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

---

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Résoudre $S'' + S' + S = \mathrm{e}^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

---

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ qui a pour solutions $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\mathrm{j}}$.

Résoudre $S'' + S' + S = \mathrm{e}^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

---

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ qui a pour solutions $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\mathrm{j}}$.
Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_h(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}))$.

Résoudre $S'' + S' + S = \mathrm{e}^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

---

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ qui a pour solutions $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\mathrm{j}}$.
Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_h(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}))$.
$\frac{\mathrm{e}^x}{3}$ est solution particulière, les solutions de l'équation $S'' + S' + S = \mathrm{e}^x$ sont de la forme :

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x$$

Résoudre $S'' + S' + S = \mathrm{e}^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

---

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ qui a pour solutions $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\mathrm{j}}$.
Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_h(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}))$.
$\frac{\mathrm{e}^x}{3}$ est solution particulière, les solutions de l'équation $S'' + S' + S = \mathrm{e}^x$ sont de la forme :

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x$$

Les CI donnent $\lambda = \frac{2}{3}$ et $\mu = 0$.

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Donner le DL d'Arccos à l'ordre 5 en 0.

---

Donner le DL d'Arccos à l'ordre 5 en 0.

---

$$\forall x \in ]-1;1[,\ \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Donner le DL d'Arccos à l'ordre 5 en 0.

---

$$\forall x \in ]-1;1[,\ \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

On a donc : $\mathrm{Arccos}'(x) \underset{x\to 0}{=} -(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^5))$

$$\underset{x\to 0}{=} -1-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^4+o(x^5)$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Donner le DL d'Arccos à l'ordre 5 en 0.

---

$$\forall x \in ]-1;1[,\ \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

On a donc : $\mathrm{Arccos}'(x) \underset{x\to 0}{=} -(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^5))$

$$\underset{x\to 0}{=} -1-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^4+o(x^5)$$

Puis, en intégrant :

$$\mathrm{Arccos}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Arccos}(0) - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $y = \dfrac{x+1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $y = \dfrac{x+1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

---

On pose $x = \frac{1}{h}$ et on a : $\dfrac{x+1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{\frac{1}{h}+1}{1+\mathrm{e}^{h}} = (\dfrac{1}{h}+1) \times \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{h}}$

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $y = \dfrac{x+1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

---

On pose $x = \frac{1}{h}$ et on a : $\dfrac{x+1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{\frac{1}{h}+1}{1+\mathrm{e}^{h}} = (\dfrac{1}{h}+1) \times \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{h}}$

On calcule les DL :

$1+\mathrm{e}^{h} \underset{h\to 0}{=} 1+1+h+o(h) \underset{h\to 0}{=} 2+h+o(h)$ donc :

$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{h}} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}+o(h)} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}(1-\frac{h}{2}+o(h)) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + o(h)$

$(\dfrac{1}{h}+1) \times \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{h}} \underset{h\to 0}{=} (\dfrac{1}{h}+1) \times (\dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{4} + o(h)) \underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2h} + \dfrac{1}{4} + o(1)$

Soit $\dfrac{x+1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} \underset{x\to +\infty}{=} \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} + o(1)$. L'asymptote est $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $y = \dfrac{x+1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$

---

On pose $x = \frac{1}{h}$ et on a : $\dfrac{x+1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{\frac{1}{h}+1}{1+\mathrm{e}^{h}} = (\dfrac{1}{h}+1) \times \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{h}}$

On calcule les DL :

$1+\mathrm{e}^{h} \underset{h\to 0}{=} 1+1+h+o(h) \underset{h\to 0}{=} 2+h+o(h)$ donc :

$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{h}} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}+o(h)} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}(1-\frac{h}{2}+o(h)) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{h}{4}+o(h)$

$(\dfrac{1}{h}+1) \times \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{h}} \underset{h\to 0}{=} (\dfrac{1}{h}+1) \times (\dfrac{1}{2}-\dfrac{h}{4}+o(h)) \underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2h}+\dfrac{1}{4}+o(1)$

Soit $\dfrac{x+1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} \underset{x\to +\infty}{=} \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}+o(1)$. L'asymptote est $y = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}$.

Comment avoir les positions relatives des deux courbes ?

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux