Automatismes en calcul, semaine du 6 janvier

7 janvier 2025

classes préparatoires scientifiques
Lycée Brizeux

Soit u telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -3u_n - 4u_{n+1}$.
Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Soit u telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -3u_n - 4u_{n+1}$.
Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est

$$r^2 = -3 - 4r \Leftrightarrow (r+1)(r+3) = 0$$

Il existe donc $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu(-3)^n$.

Soit u telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -3u_n - 4u_{n+1}$.
Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est

$$r^2 = -3 - 4r \Leftrightarrow (r+1)(r+3) = 0$$

Il existe donc $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu(-3)^n$.

$u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donnent $\lambda + \mu = 1$ et $-\lambda - 3\mu = 1$ on en déduit que $\mu = -1$ et $\lambda = 2$.

Soit u telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -3u_n - 4u_{n+1}$.
Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est

$$r^2 = -3 - 4r \Leftrightarrow (r+1)(r+3) = 0$$

Il existe donc $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu(-3)^n$.

$u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donnent $\lambda + \mu = 1$ et $-\lambda - 3\mu = 1$ on en déduit que $\mu = -1$ et $\lambda = 2$.

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2(-1)^n - (-3)^n}$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable. On a :

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^2 \iff \lambda'(x) = x^2 \Longleftarrow \lambda(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$f(x) = \frac{1}{3}x^4$ est donc une solution particulière.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable. On a :

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^2 \iff \lambda'(x) = x^2 \Longleftarrow \lambda(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$f(x) = \frac{1}{3}x^4$ est donc une solution particulière.

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = \lambda x + \frac{1}{3}x^4, \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ (en faisant apparaître un téléscopage)

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.

$$\forall n > 0,\ \sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + 2\sum_{k=1}^{n}1$$

$$= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n}.$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k \times k!$ (en faisant apparaître un téléscopage)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.

$$\forall n>0,\ \sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=\boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\frac{n(n+1)}{2}+2n}.$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\times k!$ (en faisant apparaître un téléscopage)

$$\sum_{k=1}^{n}k\times k!=\sum_{k=1}^{n}((k+1)-1)\times k!=\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}k!$$

$$=\sum_{k=2}^{n+1}k!-\sum_{k=1}^{n}k!=\boxed{(n+1)!-1}$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Lorsqu'elles existent, donner les limites en 0 et en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1} \quad ; \quad g(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{2-x} \quad ; \quad h(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$$

Lorsqu'elles existent, donner les limites en 0 et en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1} \quad ; \quad g(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{2-x} \quad ; \quad h(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$$

$x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, par opérations, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
$\frac{x}{x+1} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, par opérations $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Lorsqu'elles existent, donner les limites en 0 et en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1} \quad ; \quad g(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{2-x} \quad ; \quad h(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$$

$x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, par opérations, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
$\frac{x}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, par opérations $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par opérations, $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^2$
$\forall x, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-\mathrm{e}^{2-x} \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{2-x}$ et, par le théorème des gendarmes, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Lorsqu'elles existent, donner les limites en 0 et en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1} \quad ; \quad g(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{2-x} \quad ; \quad h(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$$

$x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, par opérations, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
$\frac{x}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, par opérations $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par opérations, $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^2$
$\forall x, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-\mathrm{e}^{2-x} \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{2-x}$ et, par le théorème des gendarmes, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $0 < x < 1$, $h(x) = 0$ et si $-1 < x < 0$, $h(x) = -\frac{1}{\pi x}$ donc h a des limites en 0^+ et en 0^- mais pas en 0.
On a toujours $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$ donc, avec le théorème des gendarmes, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}$.

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux