Automatismes en calcul, semaine du 9 décembre

15 décembre 2024

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x)\mathrm{d}x$.

- Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x)\sin^7(x)\mathrm{d}x$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x$. Pour tout réel x,

$$\sin^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sin(3x) + \tfrac{3}{4}\sin(x).$$

- Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x)\sin^7(x)\mathrm{d}x$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x$. Pour tout réel x,

$$\sin^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sin(3x) + \tfrac{3}{4}\sin(x). \text{ Il suit :}$$

$$\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

- Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x)\sin^7(x)\mathrm{d}x$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\int_0^{\pi} \sin^3(x)\mathrm{d}x$. Pour tout réel x,

$$\sin^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sin(3x) + \tfrac{3}{4}\sin(x). \text{ Il suit :}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

- Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x)\sin^7(x)\mathrm{d}x$
L'intégrande est impaire et on intègre sur un intervalle centré sur 0, on en déduit que l'intégrale est nulle.

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

  $\det(A) = 41 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

  $\det(A) = 41 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

  On a $L_3 = L_2 - 2L_1$ donc en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ on a $B \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc B n'est pas inversible.

Inverser $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Inverser $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On opère l'algorithme de Gauss sur $AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Inverser $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On opère l'algorithme de Gauss sur $AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Et on aboutit à :

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4b_1 - b_2 + 7b_3 \\ 8b_1 - b_2 - 5b_3 \\ -4b_1 + 5b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 8 & -1 & -5 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$