# Mathématiques - Devoir Maison 15 - correction

**Méthode du point milieu pour approcher $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\mathrm{d}t$, vitesse de convergence**

On note, pour tout $t \in [0;\pi]$, $g(t) = \sin(t^2)$.

1. Justifier que $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;\pi]$. Donner un majorant de $|g''(t)|$ sur $[0;\pi]$.
   *La fontion $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui les sont.*
   *On a, $\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = 2t\cos(t^2)$ et $g''(t) = 2\cos(t^2) - 4t^2\sin(t^2)$.*
   *On en déduit que $\forall t \in [0;\sqrt{\pi}],\ |g''(t)| \leq 2\cos(t^2)| + 4|t^2\sin(t^2)| \leq 2 + 4\pi$.*
2. Dans cette question, on introduit des notations qui seront utilisées dans la suite.
   Pour $n \geq 1$, soit la subdivision régulière de $[0;\sqrt{\pi}]$ qui comporte $n+1$ points que l'on note $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$. Pour $i \in [\![0;n]\!]$, que vaut $\alpha_i$ ?
   *On a, $\forall i \in [\![0;n]\!],\ \alpha_i = i\frac{\sqrt{\pi}}{n}$.*
   Pour $i \in [\![0;n-1]\!]$, on note $\beta_i$ le milieu de chaque intervalle $[\alpha_i;\alpha_{i+1}]$.
   Exprimer $\beta_i$ en fonction de $\alpha_i$ et $\alpha_{i+1}$.
   *On a, $\forall i \in [\![0;n]\!],\ \beta_i = \frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}$.*
3. On utilise la méthode du point milieu avec $n \geq 1$ rectangles pour approcher $\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\mathrm{d}t$.
   Exprimer, à l'aide des notations introduites, l'approximation $I(n)$ obtenue.
   *Pour $i \in [\![0;n-1]\!]$, on approche $\displaystyle\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(t)\,dt$ par $\frac{\sqrt{\pi}}{n}g(\beta_i)$.*
   *En utilisant la relation de Chasles, il vient $I(n) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} g(\beta_i)$.*
4. Soit $n \geq 1$.
   a) Etablir que, pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, on a : $\displaystyle\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (t-\beta_i)\mathrm{d}t = 0$.
   *On peut calculer l'intégrale ou bien remarquer que l'on intègre une fonction affine qui s'annule au milieu de l'intervalle d'intégration. Les surfaces algébriques se compensent et l'intégrale est nulle. (Faire une figure).*

   b) Prouver que : $\forall i \in [\![0;n-1]\!], \forall t \in [\alpha_i;\alpha_{i+1}],\ g(t) = g(\beta_i) + g'(\beta_i)(t-\beta_i) + \displaystyle\int_{\beta_i}^{t} (t-x)g''(x)\mathrm{d}x$

   *Pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, il s'agit de la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à la fonction $g$ entre $\beta_i$ et $x \in [\alpha_i;\alpha_{i+1}]$.*

   c) Déduire des deux questions précédentes, ainsi que de la question 1., que :
   $$\forall i \in [\![0;n-1]\!],\ \left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(t)\mathrm{d}t \ - \ \frac{\sqrt{\pi}}{n}g(\beta_i)\right| \ \leq \ \frac{\pi\sqrt{\pi}}{24n^3}\ (2+4\pi)$$
   *Pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, on a :*
   $$\begin{aligned}
   \left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(t)\,dt - \frac{\sqrt{\pi}}{n}g(\beta_i)\right| &= \left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (g(t) - g(\beta_i))\,dt\right| \quad \textit{puis, avec 4.b) :} \\
   &= \left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \left(g'(\beta_i)(t-\beta_i) + \int_{\beta_i}^{t} (t-x)g''(x)\,dx\right) dt\right| \\
   &= \left|g'(\beta_i)\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (t-\beta_i)\,dt + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \left(\int_{\beta_i}^{t} (t-x)g''(x)\,dx\right) dt\right| \quad \textit{Avec 4.a) :} \\
   &= \left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \left(\int_{\beta_i}^{t} (t-x)g''(x)\,dx\right) dt\right| \\
   &\leq \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \left|\int_{\beta_i}^{t} (t-x)g''(x)\,dx\right| dt
   \end{aligned}$$

*Regardons plus précisément* $\left|\int_{\beta_i}^{t}(t-x)g''(x)\,dx\right|$. *De deux choses l'une :*

- *Soit* $t \geq \beta_i$ *et alors :* $\left|\int_{\beta_i}^{t}(t-x)g''(x)\,dx\right| \leq \int_{\beta_i}^{t}|(t-x)|\ |g''(x)|dx = \int_{\beta_i}^{t}(t-x)\ |g''(x)|dx$
- *Soit* $t < \beta_i$ *et alors :* $\left|\int_{\beta_i}^{t}(t-x)g''(x)\,dx\right| \leq \int_{t}^{\beta_i}|(t-x)|\ |g''(x)|dx = \int_{\beta_i}^{t}(t-x)\ |g''(x)|dx$

*Dans les deux cas :*

$$\left|\int_{\beta_i}^{t}(t-x)g''(x)\,dx\right| \leq \int_{\beta_i}^{t}(t-x)\left|g''(x)\right|\,dx \leq (2+4\pi)\ \int_{\beta_i}^{t}(t-x)\,dx \leq \frac{2+4\pi}{2}(t-\beta_i)^2.$$

*On a donc :*

$$\left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(t)\,dt - \frac{\sqrt{\pi}}{n}g(\beta_i)\right| \leq \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{2+4\pi}{2}(t-\beta_i)^2\,dt \leq \frac{2+4\pi}{2}\left[\frac{1}{3}(t-\beta_i)^3\right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \leq \frac{(2+4\pi)\pi\sqrt{\pi}}{24n^3}.$$

d) En déduire que : $\left|\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\mathrm{d}t\ -\ I(n)\right|\ \leq\ \pi\sqrt{\pi}\ \dfrac{2+4\pi}{24n^2}$.

*On a :* $\left|\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\,dt - I(n)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(t)\,dt - \frac{\sqrt{\pi}}{n}g(\beta_i)\right| \leq n\ \frac{(2+4\pi)\pi\sqrt{\pi}}{24n^3} \leq \frac{(2+4\pi)\pi\sqrt{\pi}}{24n^2}$.

5. Pour quel valeur de $n$ est-on alors certain que l'erreur faite dans l'approximation de $a_1$ par la méthode du point milieu est inférieure à $10^{-4}$ ?

   *L'erreur obtenue est inférieure à* $10^{-4}$ *dès lors que* $\frac{(2+4\pi)\pi\sqrt{\pi}}{24n^2} \leq 10^{-4} \iff n \geq 10^2\sqrt{\frac{(2+4\pi)\pi\sqrt{\pi}}{24}}$.
   $10^2\sqrt{\frac{(2+4\pi)\pi\sqrt{\pi}}{24}} \simeq 183,8$ *et la précision de l'approximation est inférieure à* $10^{-4}$ *dès que* $n \geq 184$.

6. En utilisant Python, donner cette valeur approche à $10^{-4}$ près de $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.

   *On obtient* $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\,dt\ \simeq I(184) \simeq 0,8948$ *à* $10^{-4}$ *près.*