PCSI Mathématiques - Devoir Surveillé 2 12/10/2019

3 heures

- Commencez par lire le sujet en entier et à vous faire une idée des parties que vous voulez aborder en priorité.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, il est néanmoins conseillé de commencer par l'exercice 1.
- Les exercices doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc, il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à **encadrer les résultats**.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$?
2. Après avoir (rapidement) donné ses domaines de définition et de dérivabilité, déterminer la dérivée de la fonction $g(x) = \ln(\sin(x^2) + 2)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+2)^{\sqrt{3}} = \pi$.
4. Déterminer toutes les racines carrées du nombre complexe $5 - 3\mathrm{i}$.
5. Résoudre l'équation différentielle $2y' - y = 3\mathrm{e}^{-5t}$ avec la condition initiale $y(0) = 7$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

   Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$.

Exercice n° 2

L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 - \mathrm{e}^x}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $f(x) + f(-x) = -1$.
   (b) Supposons qu'on connaisse la partie de $\mathcal{C}$ correspondant aux abscisses strictement positives. Comment faire pour en déduire le reste de $\mathcal{C}$?
3. (a) Faire l'étude de f sur $\mathbb{R}^{+*}$, on la résumera dans un tableau de variations complet.
   (b) Donner l'allure de $\mathcal{C}$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ puis pour $x \in \mathcal{D}$.
4. (a) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers un intervalle I à déterminer. On note g sa réciproque.
   (b) Sur la figure précédente, comment contruire la courbe de g ? La construire.
5. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a $f'(x) = f(x) + f^2(x)$.
   (b) En déduire, pour tout x appartenant à I, une expression de $g'(x)$.
6. Pour $y \in I$, déterminer une expression de $g(y)$. *(On pourra écrire $y = f(x)$).*

Exercice n° 3

(D'après Concours ATS)

On considère l'équation différentielle, définie pour $x \in]0; +\infty[$, de fonction inconnue y :

$$(E) \ : \ xy'(x) - y(x) = \mathrm{Arctan}(x)$$

et l'équation homogène associée :

$$(H) \ : \ xy'(x) - y(x) = 0.$$

1. Résoudre (H).

2. Montrer que trouver une solution particulière de (E) définie sur $]0;+\infty[$ peut se ramener à trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x^2}$.
3. Supposons que l'on ait une fonction $F(x)$, définie sur $]0;+\infty[$, qui soit une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+x^2)}$.
   Justifier que $F(x) - \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$.
4. Déterminer trois réels α, β et γ tels que, pour tout $x \in]0;+\infty[$ on ait :
   $$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{1+x^2}$$
5. En déduire une fonction $F(x)$ qui convienne.
6. Donner la solution générale de (E).

Exercice n° 4

On travaille dans le plan complexe. Soit $M(z)$ avec z un nombre complexe non nul.
z admet deux racines carrées distinctes : r et s. On note $R(r)$ et $S(s)$ leurs images respectives dans le plan.
Est-il possible d'avoir le triangle MRS rectangle en M ? Si oui, comment ?