Méthodes à retenir :

- Pour justifier que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, il suffit de vérifier que l'intersection est réduite au vecteur nul, et que la somme des dimensions est celle de l'espace vectoriel considéré, en dimension finie.
- La notion de stabilité d'un sous-espace vectoriel F par un endomorphisme est équivalente à la présence d'un bloc de zéros dans une base adaptée à une somme directe entre F et un supplémentaire.
- Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme, et la relation entre ces matrices est la formule de passage vue en PCSI.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰ *Matrice d'application linéaire dans $\mathbb{R}_3[X]$*

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

◇ **Attention** *: si* $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ *est un polynôme, la notation* $P(X+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k$ *est à différencier de* $P \times (X+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k (X+1)$....

Exercice 2 ✰ *Déterminant matrice triangulaire*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $T_{ij} = 0$ si $i > j$. Montrer que $\det(T) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} T_{kk}$

Exercice 3 ✰✰ *Trace et rang d'un projecteur*

Soit p un projecteur de E de dimension n, et $r = \mathrm{rg}(p)$.
En utilisant que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, à l'aide d'une base adaptée, démontrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

II. Exercices

Exercice 4 ✰✰*Noyau, base image d'une application linéaire*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, et $f : E \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - XP'$.

1. Justifier que f est linéaire.
2. Justifier que $f(E) \subset E$, que peut-on en déduire sur f.
3. Justifier que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X) = \{a_1 X ; a_1 \in \mathbb{R}\}$.
4. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5 ✰

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice représentant l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $E = \mathbb{R}^4$.

1. $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est-il stable par f ?
2. $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_3, e_4)$ est-il stable par f ?
3. $H = \mathrm{Vect}(e_2, e_4)$ est-il stable par f ?

Exercice 6 ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $F = \mathrm{Vect}(I_n)$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = 0\}$;

1. Justifier que G est un hyperplan de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que F et G sont supplémentaires dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi : E \to E,\ M \longrightarrow M - \dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{n} I_n$.
   Justifier que F et G sont stables par φ.
3. Détérminer la matrice de φ dans une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Exercice 7 ☆☆ *« Application transposée »*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappeler la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ecrire dans une base adaptée à cette somme directe la matrice S de l'application linéaire $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M^T$, puis calculer $\det(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$.

Exercice 8 ☆☆

Prouver qu'il existe un seul endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $\mathrm{Ker}\, u$ est engendré par $X^2 - 1$ et $X^2 + 1$ et tel que $u(X) = 2X$.

Quelle est sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$?

Quels sous-espaces vectoriels stables apparaissent dans cette écriture matricielle ?

Exercice 9 ☆☆☆

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Comparer pour l'inclusion les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, $E_2 = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{id}_E)^2)$ et $E_3 = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{id}_E)^3)$.
2. Déterminer une base de E_1.
3. En déduire un supplémentaire S_1 de E_1 dans E_2 et une base adaptée à la somme directe $E_2 = E_1 \oplus S_1$.
4. En déduire un supplémentaire S_2 de E_2 dans E_3 et une base adaptée à la somme directe $E_3 = E_2 \oplus S_2$.
5. Déterminer la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus S_1 \oplus E_2$.

Exercice 10 ☆☆☆

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. On suppose que $f + f^2 + f^3 = O_{\mathcal{L}(E)}$.

1. $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
2. Justifier que $F = \mathrm{Im}(f)$ est stable par f.
3. Montrer que l'endomorphisme $g = f_{|F}^{|F}$ induit par f sur F est un automorphisme de F.

Exercice 11 ☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0_n$. (matrice nilpotente d'indice p). Calculer $\det A$.

Exercice 12

Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det\left(M^T\right) = \det(M)$.
2. On suppose que la matrice M est antisymétrique (i.e. $M^T = -M$) et non nulle.
   (a) Montrer que si n est impair alors M n'est pas inversible.
   (b) Montrer que si $n = 2$, alors M est inversible.
   (c) Si $n = 4$, peut-on affirmer que M est inversible ? qu'elle ne l'est pas ?

Exercice 13 ☆☆☆

Calculer sous forme factorisée l'expression de

$P(x) = \det(xI_3 - M)$, où $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de x la matrice $xI_3 - M$ est-elle non inversible ?

Exercice 14 ☆☆☆

Soient $a, b \in \mathbb{C}^\star$ distincts.

On pose $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + ab + b^2$, et pour $n \geq 3$, $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}$

Calculer D_n en fonction de $n \geq 1$.

III. Exercices avancés

Exercice 15 ✩✩✩✩

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.;
2. Montrer que pour toute forme linéaire ψ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice A telle que : $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \psi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

Exercice 16 ✩✩ *Nilpotents*

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie $n \geq 2$.

On suppose que la composée n fois $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ (on dit que u est nilpotent d'ordre n).

1. Justifier qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{x}$ de E tel que $u^{n-1}(\overrightarrow{x}) \neq \overrightarrow{0}$.
2. On fixe alors un tel vecteur $\overrightarrow{x}$. Justifier que la famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}), \dots, u^{n-1}(\overrightarrow{x}))$ est une famille libre de E.
3. En déduire une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 ✩✩✩✩

Soient n un entier, $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \neq 0$. En déduire que M est inversible. Calculer son inverse.
(on pourra le chercher sous la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & (*) \\ 0_n & B^{-1} \end{pmatrix}$)

Exercice 18 ✩✩✩✩

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c'est à dire tel qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_E - f$ est inversibles.
2. Même question pour $\mathrm{Id}_E + f$

Exercice 19 ✩✩✩ *Centrale PC 2024*

1. Soit $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme $d_P : A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AP$. Déterminer la matrice de d_P en fonction de ${}^tP$ dans une base bien choisie.

2. Soit $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme $g_Q : A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto QA$. Déterminer la matrice de g_Q en fonction de Q dans une base bien choisie.

3. Soit $\varphi : A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\det(\varphi)$ et tr(φ).

Exercice 20 ✩✩✩ *CCINP MP*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$ et $U = ((1))$ (la matrice constituée de 1), deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\det(A(-1))$.
2. On note $P(x) = \det(A(a) + xU)$. Montrer que P est polynomial de degré inférieur ou égal à 1.
3. Calculer $P(-a)$ et $P(1)$. En déduire $\det(A(a))$.
4. Étudier la continuité de $a \mapsto \det(A(a))$ et retrouver la valeur de $\det(A(-1))$.

IV. Exercice corrigé à étudier

Exercice 21 ☆☆☆ *« matrices symétriques et antisymétriques »*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{A}_n = \left\{R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); R^T = -R\right\}$ et $\mathcal{S}_n = \left\{S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); S^T = S\right\}$.

1. Justifier que toute matrice $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire dans la somme $\mathcal{A}_n + \mathcal{S}_n$ sous la forme : $Q = R + S$, avec $R = \dfrac{1}{2}\left(Q - Q^T\right)$ et $S = \dfrac{1}{2}\left(Q + Q^T\right)$.
2. Justifier que la décomposition précédente est unique.
3. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.
4. Justifier que la famille $\mathcal{B}_a = (E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n})$ est une base de $\mathcal{A}_n$.
5. Justifier que la famille $\mathcal{B}_s = ((E_{ii})_{1 \leq i \leq n}, (E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n})$ est une base de $\mathcal{S}_n$.
6. En déduire une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.

Correction :

1. *Pour Q quelconque, en posant $R = \dfrac{1}{2}\left(Q - Q^T\right)$ et $S = \dfrac{1}{2}\left(Q + Q^T\right)$, on a bien $Q = R + S$, de plus $R^T = \dfrac{1}{2}\left(Q - Q^T\right)^T = \dfrac{1}{2}\left(Q^T - Q\right) = -R$ donc R est antisymétrique. De même $S^T = S$, donc S est symétrique.*

   On en déduit quie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_n + \mathcal{S}_n$.
2. *Si R_1, R_2 sont antisymétriques, S_1, S_2 symétriques et vérifient $R_1 + S_1 = R_2 + S_2$, alors par différence $R_1 - R_2 = S_2 - S_2$ et en notant M cette matrice, on a $M^T = -M = M$, donc $2M = 0_n$, donc $M = 0_n$. Ainsi la décomposition précédente est unique.*
3. *On vient de montrer : $\forall Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists!(R,S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R});\ Q = R + S$*

   Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.
4. *Les matrices de $\mathcal{B}_a$ sont toutes antisymétriques.*

   $M \in \mathcal{A}_n \iff M^T = -T \iff \forall i, j m_{ji} = -m_{ij} \iff \forall i \in [\![1,n]\!], m_i i = 0$ *et* $\forall j > i m_{ji} = -m_{ij} \iff M = \sum_{1 \leq i < j \leq n} mij E_{ij} - E_{ji} \iff M \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_a)$

   Donc $\mathcal{B}_a$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n$.

   De plus $\sum_{1 \leq i < j \leq n} mij E_{ij} - E_{ji} \Rightarrow \forall 1 \leq i < j \leq n, m_{ij} = 0$, *par liberté de la base canonique.*

   Donc $\mathcal{B}_a$ est une base de $\mathcal{A}_n$.
5. *Les matrices de $\mathcal{B}_s$ sont toutes symétriques.*

   $M \in \mathcal{S}_n \iff M^T = T \iff \forall i, j m_{ji} = m_{ij} \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j > i m_{ji} = m_{ij} \iff M = \sum_{k=1}^{n} m_{kk} E_{kk} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} mij E_{ij} + E_{ji} \iff M \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_s)$

   Donc $\mathcal{B}_s$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_n$.

   De plus $\sum_{k=1}^{n} m_{kk} E_{kk} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} mij E_{ij} + E_{ji} \Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, m_{kk} = 0$ *et* $\forall 1 \leq i < j \leq n, m_{ij} = 0$, *par liberté de la base canonique.*

   Donc $\mathcal{B}_s$ est une base de $\mathcal{S}_n$.
6. *D'après les questions 3, 4, 5, la famille $(\mathcal{B}_s, \mathcal{B}_s)$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.*

Questions sur le corrigé :
1) si l'énoncé ne donnait pas les formules pour la décomposition de Q, comment ferait-on pour les trouver ?
3) $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{S}_n = \{0_n\}$ suffit-il à obtenir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_n + \mathcal{S}_n$?
6) Est-ce cohérent au niveau des dimensions ?

Notes

[3] correction : on écrit les colonnes

[9] correction : Partant de M, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

arriver par noyaux emboités à $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ via changement de bases dans une base adaptée.

[12] correction : contre-exemples. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[13] correction :

$$(x+1)(x^2-4x+4) = (x+1)(x-2)^2$$

[14] correction : *développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient* $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ $r^2 - (a+b)r + ab = (r-a)(r-b)$ *d'où* $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$

[16] correction :

[18] correction : $(\mathrm{Id}_E - f)\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} f^k = \mathrm{Id}_E - f^p = \mathrm{Id}_E$

$$(\mathrm{Id}_E + f)\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k f^k = \mathrm{Id}_E - f^p = \mathrm{Id}_E + (-1)^{p-1} f^p = \mathrm{Id}_E$$