Méthodes à retenir :

- Attention au vocabulaire et aux notations :
  $\sum_{n=0}^{N} u_n$ est une somme partielle, avec N fixé ; $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série convergente de terme général u_n ;
  Enfin $\sum_{n\geq 0} u_n$ désigne la série de terme général u_n dont on ne connaît pas forcément la nature ;
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ converge, il suffit de comparer $|u_n|$ au terme général d'une série convergente de référence.
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ diverge, il suffit de savoir que u_n ne tend pas vers 0 (grossière divergence). La réciproque est FAUSSE ! (la série harmonique $\sum n^{-1}$ diverge...)
- Pour une série à termes tous positifs, montrer la convergence revient à majorer les sommes partielles (S_N) indépendamment de N par une même constante.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✩ *« Série géométrique »*

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\geq 0} = (a^n)_{n\geq 0}$. Calculer les sommes partielles $S_N = \sum_{i=0}^{N} a^i$, pour $N \in \mathbb{N}$. Nature de $\sum u_n$ et expression de la somme en cas de convergence.

Exercice 2 ✩ *« Série télescopique »*

Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$,

où $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et donner la valeur de sa somme.

On pourra remarquer que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)}$.

Exercice 3 ✩ *« Comparaison de séries »*

Sachant que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, quelle est la nature de la série :

$\sum_{n\geq 1} v_n$, pour $v_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}$?

$\sum_{n\geq 1} w_n$, pour $w_n = \dfrac{1}{n^2}$ si n est multiple de 3, $w_n = 0$ sinon ?

Exercice 4 ✩✩ *« Sommes partielles d'une série divergente »*

1. Calculer $\displaystyle\int_1^M \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, pour $M \geq 1$ entier.
2. Pour $k \geq 2$, encadrer $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ en utilisant la décroissance sur $[k, k+1]$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$.
3. En déduire qu'un équivalent de $S_N = \sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k}$ lorsque $N \to +\infty$ est $\ln N$.

II. Exercices

Exercice 5 ☆☆☆

Discuter selon la valeur des paramètres réels α, β la nature des séries suivantes de terme général :

a) $a_n = \alpha^{\sqrt{n}}$ b) $b_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{\beta}$

c) $c_n = \dfrac{n^\alpha}{1+n^\beta}$ d) $d_n = (1+n^\alpha)^\beta$

Exercice 6 ☆☆ *« sommes partielles d'une série divergente »*

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en $+\infty$ des sommes partielles d'ordre n des séries suivantes de terme général u_n :

1. $u_n = 1/n^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$;
2. $u_n = \ln n/n$

Exercice 7 ☆☆ *« sommes partielles d'une série divergente »*

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en $+\infty$ des sommes partielles d'ordre n des séries suivantes de terme général u_n :

1. $u_n = 1/n^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$;
2. $u_n = \ln n/n$

Exercice 8 ☆☆ *« Critère spécial »*

Prouver que $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge. En notant S sa somme, déterminer un entier N, pour que

$$|S - S_N| < 10^{-2}$$

en déduire une valeur approchée de S à 10^{-2} près.
Comment ferait-on en Python pour calculer cette valeur approchée ?

Exercice 9 ☆☆☆

Donner la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$, où $\forall n \geq 1,\ u_n = -1 + \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

III. Exercices avancés

Exercice 10 ☆☆ *Mines-Telecom 2017*

Pour $\alpha > 0$ fixé, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 11 ☆☆ *« reste d'une série convergente »*

Soit $\alpha > 1$ fixé. Justifier que pour tout $n \geq 2$,
$\int_n^{n+1} \dfrac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \dfrac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$.

En déduire un équivalent simple à $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 12 ☆☆☆ *« HP : Série de "Bertrand" »*

Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, de paramètres réels α et β, converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Exercice 13 ☆☆☆ *« Mines-Ponts »*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}$.

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 14 ☆☆☆ *Mines-Ponts PC*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :
$u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$.

1. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on précisera.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$
3. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{2^n}$

Exercice 15 ☆☆☆

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$

1. Trouver une relation de récurrence entre les éléments de la suite (u_n).
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n ;
3. Donner la nature des suites et séries de termes généraux u_n , $(-1)^n u_n$, u_n/n
   (on pourra étudier la suite définie par : $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$)
4. Déterminer la somme de la série de terme général $(-1)^n u_n$

IV. Exercices corrigés à étudier

Exercice 16 ✰✰ *Constante d'Euler »*

Pour tout $n \geq 1$, on note $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante et minorée.
2. En déduire l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que (r_n) converge vers γ.
3. Conclure que $\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1) \quad (\mathcal{E})}$, où γ est appelé constante d'Euler.

Correction :

1. *Tout d'abord* $r_{n+1} - r_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$, *car pour tout* $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ *par convexité de la fonction logarithme (ou par étude des variations de* $\varphi : x \mapsto x - \ln(1+x)$ *)*

   Ainsi la suite (r_n) *est décroissante.*

   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ *et tout* $t \in [k, k+1]$, *par décroissance de la fonction inverse, on a* $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, *puis par croissance de l'intégrale,*

   $$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}t$$

   Ainsi en sommant pour k *allant de* 1 *à* $n-1$, *par la relation de Chasles,*

   $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

   Donc en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

   on a montré $S_n - 1 \leq \ln n \leq S_n - \frac{1}{n}$, *d'où*

   $$0 \leq \frac{1}{n} \leq r_n = S_n - \ln n \leq 1$$

   D'où (r_n) *minorée par* 0.

2. *D'après le théorème de la limite monotone, la suite* (r_n) *est décroissante et minorée par* 0 *donc converge vers une limite* $\gamma \geq 0$

3. *Il s'agit d'une réécriture directe.*

Questions sur le corrigé :

1) Sur un schéma pour la comparaison série-intégrale, utilise-t-on des majorations ou des minorations pour le signe de r_n ?

2) Est-ce cohérent avec la nature de la série harmonique ?

Exercice 17 ☆☆☆ *Formule de Stirling*

1. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

   Montrer que la série $\sum v_n$ converge.

   En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $n! \sim C\sqrt{n}n^n\mathrm{e}^{-n}$ $(\star)$

2. Pour tout $n \geq 0$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$

   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $nW_n = (n-1)W_{n-2}$

   (b) En déduire que $W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$ et $W_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$

   (c) Justifier que pour tout $n > 2$, $W_n \leq W_{n-1} \leq W_{n-2}$, et en déduire que $W_n \sim W_{n-1}$

   (d) Exprimer $\lim \dfrac{W_{2p+1}}{W_{2p}}$ en fonction de la constante C et en déduire que $C = \sqrt{2\pi}$.

3. Conclure que $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$

Correction

1. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{(n+1)^n\sqrt{n+1}}\mathrm{e} = \mathrm{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$

   On a $v_n = 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right]$

   $= -\dfrac{1}{12n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

   Ainsi, $|v_n| \sim \dfrac{1}{12n^2}$ et par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum v_n$ converge.

   Par télescopage des sommes partielles $\ln u_N - \ln u_1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = K$, donc $u_n \to C = \mathrm{e}^K + 1 > 0$.

   Ainsi il existe une constante $C > 0$ telle que $n! \sim C\sqrt{n}n^n\mathrm{e}^{-n}$

2. (a) Soit $n \geq 2$: $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2}(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$

   $\underset{\text{linéarité}}{=} \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2}\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2}\cos^2 x\,\mathrm{d}x = W_{n-2} - \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2}\cos x \times \cos x\,\mathrm{d}x$

   $\underset{\text{I.P.P.}}{=} W_{n-2} - \left(\left[\dfrac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}\cos x\right]_0^{\pi/2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{(\sin x)^{n-1}}{n-1} \times (-\sin x)\,\mathrm{d}x\right)$

   Donc : $\forall n \geq 2,\ W_n = W_{n-2} - \dfrac{1}{n-1}W_n$, ce qui fournit la **relation de récurrence** :

   $\forall n \geq 2,\ nW_n = (n-1)W_{n-2} \quad (R)$

   (b) $W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^0\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$, et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.

   On montre alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_p$: « $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ »

   initialisation : $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

hérédité : supposons $\mathcal{P}_p$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$. d'après (R),
$W_{2p+2} = \dfrac{2p+2-1}{2p+2} W_{2p} = \dfrac{2p+1}{2p+2}\, W_{2p} \underset{\mathcal{P}_p}{=} \dfrac{(2p+1)}{2(p+1)}\dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p+2)(2p+1)}{[2(p+1)]^2}\dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$
$= \dfrac{(2(p+1))!}{(2^{(p+1)}(p+1)!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, d'où $\mathcal{P}_{p+1}$.

On montre de même par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{Q}_p$: « $W_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$ »
initialisation : $W_1 = 1$.
hérédité : supposons $\mathcal{Q}_p$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$. d'après (R),
$W_{2p+3} = \dfrac{2p+3-1}{2p+3} W_{2p+1} \underset{\mathcal{Q}_p}{=} \dfrac{(2p+2)}{(2p+3)}\dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{[2(p+1)]^2}{(2p+3).\,(2p+2)}\dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{(2^{(p+1)}(p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}$, d'où $\mathcal{Q}_{p+1}$.

Ainsi : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2},\quad \text{et } W_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}}$

(c) Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \sin^n t \leq \sin^{n-1} t \leq \sin^{n-2} t \leq 1$, et par croissance de l'intégrale, $W_n \leq W_{n-1} \leq W_{n-2}$.

Ainsi, par (R), $1 \leq \dfrac{W_{n-1}}{W_n} \leq \dfrac{W_{n-2}}{W_n} = \dfrac{n-1}{n}$

Donc par encadrement de limites, $\lim \dfrac{W_{n-1}}{W_n} = 1$.

D'où $W_n \sim W_{n-1}$

(d) $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}, \quad W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$

Donc $\dfrac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{(2p+1)((2p)!)^2}\dfrac{2}{\pi}$

Donc par la question précédente et $(\star)$ obtenue à la question 1,

$1 \sim \dfrac{W_{2p+1}}{W_{2p}} \sim \dfrac{2^{4p}(C\sqrt{p}p^p \mathrm{e}^{-p})^4}{(2p+1)((C\sqrt{2p}(2p)^{2p}\mathrm{e}^{-2p}))^2}\dfrac{2}{\pi} \sim \dfrac{C^2}{2\pi}$

Ainsi $C^2 = 2\pi$ et comme $C > 0$, $C = \sqrt{2\pi}$.

3. Conclusion, par $(\star)$ en reportant la valeur de C, on a :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$$

Questions sur le corrigé :

1. Où utilise-t-on la formule $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$? Quelle autre propriété du $\ln$ utilise-t-on ?

2.a) Pourquoi la formule de récurrence permet-elle de calculer tous les termes d'indices pairs à partir de W_0 ? Tous les termes d'indices pairs à partir de W_1 ?

2.b) Comment aurait-on pu trouver les formules de récurrence si elles n'avaient pas été fournies ?

2.c) Pourquoi a-t-on $W_n > 0$ pour $n \geq 0$?

Notes

[1] correction :

pour $a \neq 1, S_N = \dfrac{a^0 - a^{N+1}}{1-a}$. il y a concergence ssi $a^{N+1} \to 0$ c'est à dire ssi $|a| < 1$, vers $\dfrac{1}{1-a}$.

[9] correction : Considerer un D.l. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{n} + r_n$, avec $r_n \underset{n\to}{=} O(n^{-3/2}$ terme général d'une série convergente, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV par critère spécial, et $\sum \dfrac{1}{n}$ DV.

[13] correction : $|u_{n+1}| \to 0$, par DL2, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

[14] correction :

1. $\ell = 0$
2. apcr, $u_{n+1} \leq \dfrac{1+1/2}{2} u_n$ et majoration par $O((3/4)^n)$
3. $\sum \ln(1+u_k)$ CV, car a même nature que $\sum u_k$, on a donc $u_n = \dfrac{u_0}{2^n} \times \prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)$; $K = \lim_n u_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)$

[15] correction :

$u_n = \dfrac{3n-1}{3n} u_{n-1}$ par IPP

$u_0 = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{9}$