Méthodes à retenir :
- Utiliser un polynôme annulateur pour calculer les puissances d'une matrice ou son inverse si elle est inversible

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰

Trouver un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, après avoir calculé $(M - I_3)^2(M - 2I_3)$.

Exercice 2 ✰

Trouver l'inverse de A inversible telle que $A^3 + I_n = 0_n$

Exercice 3 ✰

Calculer : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 2 & & & 2^{n-1} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & n & & & n^{n-1} \end{vmatrix}$;

II. Exercices

Exercice 4 ✰

Trouver un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, après avoir calculé $(M - I_3)$, $(M - I_3)^2$, $M(M - I_3)^2$.

Exercice 5 ✰✰

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $P = (X - 1)(X + 1)$ est annulateur de A, et en déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6 ✰✰

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne contenant que des 1.

1. Calculer J^2.
2. En déduire un polynôme Q annulateur de J.
3. En déduire la valeur de J^k pour tout $k \geq 2$, en fonction de I_n, J et k.

Exercice 7

Donner un polynôme réel P de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = 2$ et $P(1) = 3$. Est-il unique ?

Exercice 8 ✰

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0_n$. (matrice nilpotente d'indice p). Calculer $\det A$.

Exercice 9 ✰

Démontrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un polynôme non nul.

Exercice 10 ✰✰✰

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer N^2 et N^3 et en déduire un polynôme annulateur de N.

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer N^k en fonction de k, en explicitant ses coefficients.

III. Exercices avancés

Exercice 11 ✰✰✰

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts.

Soit
$$M_n(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Soit $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et le vecteur $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$.

1) Exprimer le produit $M_n(x_0, \dots, x_n).A$ à l'aide du polynôme P.

2) A l'aide d'un développement selon une ligne, justifier que $f : z \longmapsto \det(M_n(x_0, \dots, x_{n-1}, z))$ est polynomiale de degré $n-1$ et de coefficient dominant $\det(M_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}))$.

3) En déduire que $\det(V_n(x_0, \dots, x_n)) = \det(V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})) \times \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)$, puis donner l'expression factorisée de $\det(V_n(x_0, \dots, x_n))$.

4) Soit $(r_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(r_k) \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la question 1, que P est dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 12 ✰✰✰

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow x_j \neq x_j$.

Montrer que l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},\ P \longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)))$ est un isomorphisme.

Exercice 13 ✰

Démontrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un polynôme non nul.

Exercice 14 ✰✰✰

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, P un polynôme annulateur de A, Q un polynôme annulateur de C. Démontrer que $R = PQ$ est un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix}$

indication : on pourra calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}$

Notes

[3] correction :

[6] correction : $J^2 = nJ$, $Q = X^2 - nX$ $X^k = B_k Q + R_k$, donc $J^k = a_k I_n + b_k J$ avec en évaluant en 0 $0 = 0^k + a_k$ et en évaluant en $1/n$, $1/n^k = b_k/n$, d'où $J^k = \frac{1}{n^{k-1}} J$

[11]

correction :

1) $V_n(x_0, \ldots, x_n).A = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} = B$

2) On développe selon la dernière ligne : $V(x_0, \ldots, x_{n-1}, z) = \sum_{j=0}^{n} z^j D_j$, où D_j est le déterminant obtenu en rayant la $n$ème ligne et la $j$ème colonne

On reconnait une expression polynomiale de degré $n-1$ et le coefficient dominant est $D_n = V_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

3) En déduire que $\det(V_n(x_0, \ldots, x_n)) = \det(V_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})) \times \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)$, puis donner l'expression factorisée de $\det(V_n(x_0, \ldots, x_n))$.

4) On a $V_n(x_0, \ldots, x_n).A = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} = B$

Par hypothèse, B est à composantes réelles, donc $A = V_n(x_0, \ldots, x_n)^{-1} B$ est à composantes réelles, donc les coefficients de P sont réels et finalement P est dans $\mathbb{R}[X]$.