Méthodes à retenir :

- A l'aide du tableau de variations de f_n dérivable sur I, il est aisé de calculer la valeur de $\|f_n\|_{\infty,I} = \sup\{|f_n(t)|; t \in I\}$.
- Pour démontrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction limite f, il suffit de montrer que $\|f_n - f\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Sur un segment $[a,b]$, le théorème d'interversion permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$, lorsque la suite de fonctions continue (f_n) CVU sur $[a,b]$.
- pour nier la CVU, il suffit de trouver une suite convergente (x_n) vers une limite ℓ et telle que $|f_n(x_n) - f(\ell)|$ ne tend pas vers 0.
- Sur un segment $[a,b]$, lorsque la suite de fonctions continues (f_n) CVU sur $[a,b]$ vers f, on sait que $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$.
- Pour démontrer qu'une série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur un intervalle I vers une fonction somme S, il suffit de montrer que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,I}$ converge. On a alors convergence normale donc convergence uniforme de la suite des fonctions sommes partielles vers la fonction somme.
- Sur un intervalle I, lorsque la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément (a fortiori si converge normalement), alors la somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.
- Sur un segment $[a,b]$, le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$, lorsque la série de fonction converge uniformément, a fortiori lorsqu'elle converge normalement sur $[a,b]$.
- Sur un intervalle quelconque I, pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur I, et telle que la série $\sum u_n'$ des dérivées CVU sur I, on peut dériver terme à terme.

I. Applications du cours

Exercice 1 ☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $t \mapsto \exp(t)$.

Exercice 2 ☆☆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x^n$.
1) Notons $J = [0,1[$. Montrer que (f_n) converge simplement vers f sur J.
2) (f_n) converge-t-elle simplement vers f sur $[0,1]$?
3) Montrer que la convergence est uniforme sur $K = [1/4, 1/2]$.

Exercice 3 ☆☆

Soit $a > 0$. Quel est l'ensemble de définition de $g : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (ax)^n$?

Exercice 4 ☆☆

Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^2 + x^2} \text{ avec } n \geqslant 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 ☆☆ *interversion lim-int avec CVU*

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n^2}$. Après avoir étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$

Exercice 6 ☆☆ *Interversion* $\lim\limits_{n\to+\infty}$ *et* $\displaystyle\int_{[0,1]}$:

Théorème de convergence dominée

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\longmapsto \dfrac{(-t)^n}{1+t^2}$

1. (a) Justifier que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$.
   (b) Justifier que la fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ t\longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue positive intégrable sur $[0,1]$, et domine la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\forall t\in[0,1],\ |f_n(t)|\leq\varphi(t)$).
   (c) Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $f:t\mapsto 0$.
2. En appliquant le théorème de convergence dominée, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\displaystyle\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 7 ☆☆ *Interversion* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ *et* $\displaystyle\int_{[0,1]}$:

Théorème d'intégration terme à terme

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n:]0,1]\to\mathbb{R},\ t\longmapsto t^n\ln t$

1. (a) Justifier que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, v_n est continue sur $]0,1]$.
   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, v_n est continue intégrable sur $]0,1]$, et que : $\displaystyle\int_0^1|v_n(t)|\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)^2}$.
   (c) En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq0}\int_{]0,1]}|v_n|$ converge.
2. Justifier que pour tout $t\in[0,1[$, $\dfrac{1}{1-t}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}t^n$.
3. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.
   En appliquant le théorème d'intégration terme à terme, en déduire que : $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t=\frac{-\pi^2}{6}$

II. Exercices

Exercice 8 ☆☆

Pour chaque suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, étudier la convergence simple sur I vers une éventuelle fonction limite :

a) $I=]-1,1]$, $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n:x\mapsto(n-1)x^n$;
b) $I=[0,\pi/2]$, $\forall n\in\mathbb{N},\ g_n:x\mapsto(\cos x)^n$;
c) $I=[0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N},\ h_n:x\mapsto\dfrac{1}{1+nx^2}$;
d) $I=[0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N},\ i_n:x\mapsto\dfrac{nx+1}{n^2+n^3x^2}$;
e) $I=[-1/2,1/2]$, $\forall n\in\mathbb{N},\ j_n:x\mapsto\displaystyle\sum_{k=n}^{n^2}x^k$.

Exercice 9 ☆☆

Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $f_n:]0,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{x}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations de f_n.
2. En déduire que pour tout $a>0$, f_n est bornée sur $[a,+\infty[$ et $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}=\dfrac{\mathrm{e}^{-na}}{a}$.
3. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $]0,+\infty[$.
4. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]0,+\infty[$.
5. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $]1,+\infty[$.

Exercice 10 ☆☆

Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $u_n:]0,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{x}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations de u_n.
2. En déduire que pour tout $a>0$, u_n est bornée sur $[a,+\infty[$ et $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[}=\dfrac{\mathrm{e}^{-na}}{a}$.
3. Quelle est la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{e^{-na}}{a}$?
4. Que peut-on en déduire pour la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq0}u_n$?
5. En déduire que la fonction $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 11 ☆☆

Soit $I =]0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$f_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-nx}$.
Etudier la convergence simple puis la convergence normale sur I de la série de fonctions $\sum f_n$.
Même question en restriction à $J = [1/2, 1]$.

Exercice 12 ☆☆☆ *Interversion $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, calculs de sommes de « séries dérivées »*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n :]-1,1[\to \mathbb{R},\ t \longmapsto t^n$

1. (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers $S : t \longmapsto \frac{1}{1-t}$.
   (c) Justifier que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} w_n'$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$.
2. En appliquant le théorème de dérivation terme à terme, en déduire que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée en tout point.
3. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$.
4. En reprenant la méthode à l'ordre 2, calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$.

Problème 1 ☆☆ *Fonction Dzêta*

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n(x) = \frac{1}{n^x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.
2. Soit $a \in]1;\ +\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$.
   Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[$,
   $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.
   (b) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.
4. Préciser le sens de variation de ζ.
5. On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
   (a) Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
   $$\forall x \geq 2,\ 1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
   (c) En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$.
6. On considère à présent $h \in]0;\ +\infty[$.
   A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.
7. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.
8. On pose : $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
   (a) Justifier que F est bien définie.
   (b) Monter que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que :
   $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.
   (d) Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

Exercice 13 ☆☆

Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$$

Exercice 14 ☆☆

Soit $F(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1) Existence de F sur]0,+∞[.

2) Calculer la limite en +∞ de $xF(x)$. On pourra calculer la limite de $(nF(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3) Donner un équivalent de $F(n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 15 ✩✩✩ *Intégrale d'une somme de fonctions*

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$.

1. Justifier que l'on définit bien une fonction f sur $\mathbb{R}_*^+$ par l'expression précédente.
2. Montrer que f est continue sur $I =]0, +\infty[$.
notons qu'il suffit de montrer le résultat sur tout segment de I
3. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$ et que
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1+\sqrt{n+1})}$$
4. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

III. Exercices avancés

Exercice 16 ✩✩

On pose pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+3}} dx$. Justifier qu'on peut définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis que cette suite converge et donner sa limite sous forme intégrale (on ne demande pas le calcul de l'intégrale).

Exercice 17 ✩✩

On pose pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \frac{1+t^n \sin(nt^2)}{1+t^2}\ dt$.
Justifier que la suite converge et donner sa limite sous forme intégrale; calculer cette intégrale.

Exercice 18 ✩✩

Justifier que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :
$$\forall t \in [0, 1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$
converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

La suite $\left(\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 1}$ admet-elle une limite finie?
on pourra utiliser l'inégalité : $\ln(1+u) \leq u, \forall u > -1$

Exercice 19 ✩✩

Pour $n \geq 1$, on pose $g_n : t \longmapsto n\exp(-n-t)$.

1. La suite (g_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une limite g?
2. La fonction g est-elle dérivable?
3. Pour $n \geq 1$, g_n est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}^+, g'(t) = \lim_{n\to+\infty} g_n'(t)$?

Exercice 20 ✩✩✩✩

On pose $u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x$ pour $x \in]0, 1]$ et $u_n(0) = 0$

1. Calculer, pour $x \in]0, 1]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$
2. Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
3. En déduire l'égalité :
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 21 ✩✩

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$, où f_n est définie pour $x \in [0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{nx}{n^3+x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note S sa somme.
2) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_\infty$.
3) La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$? Normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^+$?
4) Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 22 ✩

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{x^2+n^2}$.

Exercice 23 ✩✩✩

Démontrer que la fonction

$\psi\ :\ [1, +\infty[\to\ \mathbb{R},\ x\ \mapsto\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n)^x}$ est définie et continue sur $I = [1, +\infty[$.

Exercice 24 ✰✰

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $J_n = \displaystyle\int_{[0,1]} t^n(1-t)^n \mathrm{d}t$;
prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$;

Exercice 25 ✰✰✰

Soit $A > 0$, et $I = [0, A] \subset \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

1. En utilisant l'inégalité $0 \leq \ln(1+u) \leq u$ valable sur $\mathbb{R}^+$, montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle, notée $\tilde{0}$.
2. Retrouver ce résultat en majorant $|f_n(x) - \tilde{0}(x)|$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 26 ✰✰✰

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \sqrt{n}\, \sin x\, (\cos x)^n$.

1. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t$.
2. Existence et calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t$.
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?

Exercice 27 ✰✰ *lemme de Riemann-Lebesgue*

Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H_m = \displaystyle\int_\alpha^\beta h(t)e^{imt}\ \mathrm{d}t$.

Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} H_m = 0$

Exercice 28 ✰✰

On dit que la **suite de fonctions** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approche uniformément la fonction f sur $[a, b]$
ssi
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \ \forall x \in [a, b],\quad |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Montrer que la suite (f_n) définie par

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{nx + 1}{n + nx^2}$$

approche uniformément sur $[0, 1]$ la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Exercice 29 ✰✰

Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : t \longmapsto \dfrac{\sin(nt)}{n}$.

1. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[0, \pi]$ vers une limite f ?
2. La fonction f est-elle dérivable ?
3. Pour $n \geq 1$, f_n est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout $t \in [0, \pi]$, $f'(t) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n'(t)$?

Exercice 30 ✰✰

Pour $n \geq 1$, on pose $g_n : t \longmapsto n\exp(-n - t)$.

1. La suite (g_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une limite g ?
2. La fonction g est-elle dérivable ?
3. Pour $n \geq 1$, g_n est-elle dérivable, si oui, donner l'expression de sa dérivée.
4. A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $g'(t) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n'(t)$?

Exercice 31 ✰✰✰

Justifier que $f\ :\ t \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est 2π-périodique et impaire.

Exercice 32 ✰✰✰

1. Exprimer $\dfrac{1}{1+t}$ sous la forme de la somme d'une série numérique géométrique, pour $t \in [0, 1[$.
2. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

Exercice 33 ✰✰✰

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x}$$

1. Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
2. En remarquant que $S'(x)$ est du signe de $-1/x^2$, préciser le sens de variation de S.
3. Etablir que :

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

4. Donner un équivalent de S en 0.

5. En remarquant que

$$\frac{S(x)+S(x+1)}{2} \leq S(x) \leq \frac{S(x)+S(x-1)}{2}$$

donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 34 ✰✰✰✰ *Etude d'une somme de fonctions*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur
$$\mathcal{D} = [0,1[\cup]1,+\infty[.$$
On note S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et étudier le signe de $S'(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathcal{D}$.
3. Montrer que S admet une limite en 1.
4. Montrer que S tend vers 0 en $+\infty$.
5. Donner le tableau de variations de S, puis tracer l'allure de la courbe représentative de S.

IV. Exercice corrigé à étudier

Exercice 35 ☆☆ *Non CVU à l'aide d'une suite de valeurs*

Soit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$

1. Montrer la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. A l'aide d'une suite (x_n) de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ convergente vers une limite ℓ et telle que $f_n(x_n)$ ne tende pas vers $f(\ell)$, justifier que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers f.
3. En calculant la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$, retrouver par une autre méthode que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Correction :

1. *Pour* $x=0$*,* $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*.*

   Pour $x \neq 0$*,* $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n x}{2^n n x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*.*

   Donc (f_n) *converge simplement (CVS) sur* $[0,1]$ *vers la fonction nulle* $f=\tilde{0}$*.*

2. *En posant* $x_n = \dfrac{1}{2^n}$*, on a pour tout* $n\in\mathbb{N}$*,* $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \ell$*, et* $f_n(x_n) = \dfrac{1}{1+\frac{n}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

   Mais alors $|f_n(x_n) - f(\ell)|$ *ne tend pas vers* 0*, alors que* $0 \leq |f_n(x_n)-f(\ell)| \leq |f_n(x_n)-f_n(\ell)| + |f_n(\ell)-f(\ell)| \leq |f_n(x_n)-f_n(\ell)| + \|f_n - f\|_\infty^{[0,1]}$*.*

   S'il y avait convergence uniforme, $\|f_n - f\|_\infty^{[0,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et par continuité de* f_n *pour* n *suffisamment grand,* $|f_n(x_n) - f_n(\ell)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

   Ce qui conduirait à l'impossibilité $0 \leq 1 \leq 0$

   Ainsi (f_n) *ne converge pas uniformément sur* $[0,1]$ *vers* $f=\tilde{0}$

3. $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\ln(1+2^n n) \sim \frac{\ln 2}{2}$.

   La suite (f_n) *est une suite de fonctions continues sur le segment* $[0,1]$*, si elle convergeait uniformément, on devrat avoir* $\displaystyle\lim_n \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$*, ce qui est impossible.*

   On retrouve bien que (f_n) *ne converge pas uniformément sur* $[0,1]$ *vers* $f=\tilde{0}$*.*

Questions sur le corrigé :
a) rappeler le lien entre convergence simple et convergence uniforme.
b) Peut-on composer des équivalents ?

Notes

[1] correction : DL1 $\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)=\frac{t}{n}+O(n^{-2})$

[4] correction :

[15] correction : on minore $f(x)\geq\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ non intégrable en $+\infty$.

[20] correction :

1. Pour $x\in]0,1[$, onreconnaît une série géométrique de raison $-x^2\in]-1,1[$, donc convergente et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=-x^2\ln x\frac{1}{1+x^2}}$

   Cette expression est encore valable pour $x=1$.

2. • On peut essayer de montrer la convergence normale : u_n est dérivable, $u_n'(x)=(-1)^{n+1}[(2n+2)x^{2n+1}\ln x+x^{2n+1}]=(-1)^{n+1}x^{2n+1}((2n+2)\ln x+1)$.

   $((2n+2)\ln x+1)\geq 0\iff x\geq e^{-1/(2n+2)}$

   Ainsi u_n' change de signe en $e^{-1/(2n+2)}$, et $\|u_n\|_{\infty,]0,1]}=|u_n(e^{-1/(2n+2)})|=\frac{1}{(2n+2)e}$, mais ce n'est pas le terme général d'une série convergente... La série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $]0,1]$.

   • On va étudier la CVU à l'aide de la foncion $R_N=S-S_N:x\mapsto\sum_{n=N+1}^{+\infty}u_n(x)$.

   On calcule pour $x\in]0,1]$ et $N\in\mathbb{N}$: $R_N(x)=-x^2\ln x\frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}=\frac{(-1)^Nx^{2N+4}\ln x}{1+x^2}$.

   Ainsi, $|R_N(x)|\leq-\ln(x)x^{2N+4}$, car $\ln(x)\leq 0$.

   Donc R_N est bornée sur $]0,1]$ et compte-tenu du calcul fait pour $\|u_n\|_{\infty,]0,1]}$, on a $\|R_N\|_{\infty,]0,1]}\leq\|u_{2N+4}\|_{\infty,]0,1]}=\frac{1}{(2(2N+4)+2)e}$

   Comme $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{(2(2N+4)+2)e}=0$, par théorème d'encadrement, $\lim_{N\to+\infty}\|R_N\|_{\infty,]0,1]}=0$

   Comme $R_N(0)=0$, pour tout N, on a donc $\boxed{\lim_{N\to+\infty}\|S-S_N\|_{\infty,[0,1]}=0}$. Ainsi $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

3. On applique le théorème d'intégration terme à terme sur le segment $[0,1]$:

   - on a $\forall n\in\mathbb{N}, u_n$ est continue sur $[0,1]$ (limite usuelle en 0).

   - La série de fonctions $\sum_{n\geq 1}u_n$ CVU sur $[0,1]$ vers $S:x\mapsto\begin{cases}\frac{-x^2\ln x}{1+x^2} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

   Donc S est continue sur $[0,1]$, la série numérique $\sum_{n\geq 1}\int_0^1 u_n$ converge et

   $$\int_0^1\frac{-x^2\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x\,\mathrm{d}x$$

   Pour $n\geq 1$, par IPP, $\int_0^1 u_n=\lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\ln x]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{x^{2n+2}}{2n+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(2n+3)^2}$

   Donc $1=\int_0^1-\ln x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-(1+x^2)\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{-x^2\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \,\mathrm{d}x$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}}$, compte-tenu du décalage d'indice.

[20] correction :

Correction. *1. Pour $x \in]0,1[$, onreconnaît une série géométrique de raison $-x^2 \in]-1,1[$, donc convergente et* $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -x^2 \ln x \frac{1}{1+x^2}}$

Cette expression est encore valable pour $x = 1$.

2. • On peut essayer de montrer la convergence normale : u_n est dérivable, $u_n'(x) = (-1)^{n+1}[(2n+2)x^{2n+1}\ln x + x^{2n+1}] = (-1)^{n+1}x^{2n+1}((2n+2)\ln x + 1)$.

$((2n+2)\ln x + 1) \geq 0 \iff x \geq e^{-1/(2n+2)}$

Ainsi u_n' change de signe en $e^{-1/(2n+2)}$, et $\|u_n\|_{\infty,]0,1]} = |u_n(e^{-1/(2n+2)})| = \dfrac{1}{(2n+2)e}$, mais ce n'est pas le terme général d'une série convergente... La série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $]0,1]$.

• On va étudier la CVU à l'aide de la foncion $R_N = S - S_N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$.

On calcule pour $x \in]0,1]$ et $N \in \mathbb{N}$: $R_N(x) = -x^2 \ln x \dfrac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2} = \dfrac{(-1)^N x^{2N+4}\ln x}{1+x^2}$.

Ainsi, $|R_N(x)| \leq -\ln(x) x^{2N+4}$, car $\ln(x) \leq 0$.

Donc R_N est bornée sur $]0,1]$ et compte-tenu du calcul fait pour $\|u_n\|_{\infty,]0,1]}$, on a $\|R_N\|_{\infty,]0,1]} \leq \|u_{2N+4}\|_{\infty,]0,1]} = \dfrac{1}{(2(2N+4)+2)e}$

Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(2(2N+4)+2)e} = 0$, par théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \|R_N\|_{\infty,]0,1]} = 0$

Comme $R_N(0) = 0$, pour tout N, on a donc $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \|S - S_N\|_{\infty,[0,1]} = 0}$. Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

3. On applique le théorème d'intégration terme à terme sur le segment $[0,1]$:

- on a $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0,1]$ (limite usuelle en 0).

- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ CVU sur $[0,1]$ vers $S : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-x^2 \ln x}{1+x^2} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

Donc S est continue sur $[0,1]$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_0^1 u_n$ converge et

$$\int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \,\mathrm{d}x$$

Pour $n \geq 1$, par IPP, $\displaystyle\int_0^1 u_n = \lim_{\varepsilon\to 0} [\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\ln x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{2n+2}}{2n+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+3)^2}$

Donc $\displaystyle 1 = \int_0^1 -\ln x \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-(1+x^2)\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{-x^2\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \,\mathrm{d}x$

Conclusion : $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}}$*, compte-tenu du décalage d'indice.*

[23] correction : on utilise le CSSA pour la CVU

[26] correction : Par calcul direct de primitive, on a $\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$

Pour tout $t \in [0, \pi/2]$ $f_n(t) \to 0$, donc CVS vers $\tilde{0}$.

$f_n(\arctan(1/\sqrt{n})) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)/2} \to e^{-1/2} \neq 0$ pas de CVU !

Notes

[1] correction : DL1 $\ln\left(1+\dfrac{t}{n}\right) = \dfrac{t}{n} + O(n^{-2})$

[4] correction :

[15] correction : on minore $f(x) \geq \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ non intégrable en $+\infty$.

[20] correction :

1. Pour $x \in]0,1[$, onreconnaît une série géométrique de raison $-x^2 \in]-1,1[$, donc convergente et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -x^2 \ln x \dfrac{1}{1+x^2}}$

   Cette expression est encore valable pour $x = 1$.

2. • On peut essayer de montrer la convergence normale : u_n est dérivable, $u_n'(x) = (-1)^{n+1}[(2n+2)x^{2n+1}\ln x + x^{2n+1}] = (-1)^{n+1}x^{2n+1}((2n+2)\ln x + 1)$.

   $((2n+2)\ln x + 1) \geq 0 \iff x \geq e^{-1/(2n+2)}$

   Ainsi u_n' change de signe en $e^{-1/(2n+2)}$, et $\|u_n\|_{\infty,]0,1]} = |u_n(e^{-1/(2n+2)})| = \dfrac{1}{(2n+2)e}$, mais ce n'est pas le terme général d'une série convergente... La série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $]0,1]$.

   • On va étudier la CVU à l'aide de la foncion $R_N = S - S_N : x \mapsto \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$.

   On calcule pour $x \in]0,1]$ et $N \in \mathbb{N}$: $R_N(x) = -x^2 \ln x \dfrac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2} = \dfrac{(-1)^N x^{2N+4}\ln x}{1+x^2}$.

   Ainsi, $|R_N(x)| \leq -\ln(x) x^{2N+4}$, car $\ln(x) \leq 0$.

   Donc R_N est bornée sur $]0,1]$ et compte-tenu du calcul fait pour $\|u_n\|_{\infty,]0,1]}$, on a $\|R_N\|_{\infty,]0,1]} \leq \|u_{2N+4}\|_{\infty,]0,1]} = \dfrac{1}{(2(2N+4)+2)e}$

   Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{(2(2N+4)+2)e} = 0$, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{N\to+\infty} \|R_N\|_{\infty,]0,1]} = 0$

   Comme $R_N(0) = 0$, pour tout N, on a donc $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty} \|S - S_N\|_{\infty,[0,1]} = 0}$. Ainsi $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

3. On applique le théorème d'intégration terme à terme sur le segment $[0,1]$:

   - on a $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0,1]$ (limite usuelle en 0).

   - La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ CVU sur $[0,1]$ vers $S : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-x^2\ln x}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   Donc S est continue sur $[0,1]$, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \int_0^1 u_n$ converge et

   $$\int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x\,\mathrm{d}x$$

   Pour $n \geq 1$, par IPP, $\int_0^1 u_n = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} [\dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}\ln x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \dfrac{x^{2n+2}}{2n+3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{(2n+3)^2}$

   Donc $1 = \int_0^1 -\ln x \mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{-(1+x^2)\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \dfrac{-x^2 \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \,\mathrm{d}x$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}}$, compte-tenu du décalage d'indice.

[20] correction :

Correction.

1. *Pour $x \in]0,1[$, onreconnaît une série géométrique de raison $-x^2 \in]-1,1[$, donc convergente et* $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -x^2 \ln x \frac{1}{1+x^2}}$

   Cette expression est encore valable pour $x = 1$.

2. *• On peut essayer de montrer la convergence normale : u_n est dérivable, $u_n'(x) = (-1)^{n+1}[(2n+2)x^{2n+1}\ln x + x^{2n+1}] = (-1)^{n+1}x^{2n+1}((2n+2)\ln x + 1)$.*

   $((2n+2)\ln x + 1) \geq 0 \iff x \geq e^{-1/(2n+2)}$

   Ainsi u_n' change de signe en $e^{-1/(2n+2)}$, et $\|u_n\|_{\infty,]0,1]} = |u_n(e^{-1/(2n+2)})| = \dfrac{1}{(2n+2)e}$, mais ce n'est pas le terme général d'une série convergente... La série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $]0,1]$.

   • On va étudier la CVU à l'aide de la foncion $R_N = S - S_N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$.

   On calcule pour $x \in]0,1]$ et $N \in \mathbb{N}$: $R_N(x) = -x^2 \ln x \dfrac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2} = \dfrac{(-1)^N x^{2N+4} \ln x}{1+x^2}$.

   Ainsi, $|R_N(x)| \leq -\ln(x) x^{2N+4}$, car $\ln(x) \leq 0$.

   Donc R_N est bornée sur $]0,1]$ et compte-tenu du calcul fait pour $\|u_n\|_{\infty,]0,1]}$, on a $\|R_N\|_{\infty,]0,1]} \leq \|u_{2N+4}\|_{\infty,]0,1]} = \dfrac{1}{(2(2N+4)+2)e}$

   Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(2(2N+4)+2)e} = 0$, par théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \|R_N\|_{\infty,]0,1]} = 0$

   Comme $R_N(0) = 0$, pour tout N, on a donc $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \|S - S_N\|_{\infty,[0,1]} = 0}$. *Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.*

3. *On applique le théorème d'intégration terme à terme sur le segment $[0,1]$:*

   - on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est continue sur $[0,1]$ (limite usuelle en 0).

   - La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ CVU sur $[0,1]$ vers $S : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-x^2 \ln x}{1+x^2} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

   Donc S est continue sur $[0,1]$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_0^1 u_n$ converge et

   $$\int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \,\mathrm{d}x$$

   Pour $n \geq 1$, par IPP, $\displaystyle\int_0^1 u_n = \lim_{\varepsilon\to 0} [\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \ln x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{2n+2}}{2n+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+3)^2}$

   Donc $\displaystyle 1 = \int_0^1 -\ln x \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-(1+x^2)\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

   d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \,\mathrm{d}x$

Conclusion : $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}}$ *, compte-tenu du décalage d'indice.*

[23] correction : on utilise le CSSA pour la CVU

[26] correction : Par calcul direct de primitive, on a $\int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$

Pour tout $t \in [0, \pi/2]$ $f_n(t) \to 0$, donc CVS vers $\tilde{0}$.

$f_n(\arctan(1/\sqrt{n})) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)/2} \to e^{-1/2} \neq 0$ pas de CVU !