Méthodes à retenir :

— Pour déterminer si un matrice A est diagonalisable, on commence par calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$ **sous forme factorisée**.
S'il est simplement scindé, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
Sinon A est diagonalisable si et seulement si pour toute valeur propre λ de multiplicité $m_\lambda \geq 2$, la dimension d_λ du sous-espace propre E_λ (que l'on détermine en résolvant le système $AX = \lambda X$) vérifie $m_\lambda = d_\lambda$.

— Pour justifier qu'une matrice A n'est pas diagonalisable, il suffit de connaître une valeur propre λ pour laquelle $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)) < m_\lambda$, où m_λ est la multiplicité de λ dans χ_A.

— Si χ_A n'est pas simplement scindé, A peut être non diagonalisable, comme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ...

— Si A est diagonalisable, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associée dans une base de vecteurs propres adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda$ est la matrice diagonale par blocs $D_\lambda = \mathrm{Diag}(\lambda\, \mathrm{I}_{\dim(E_\lambda)})$. La matrice de changement de base P est obtenue en mettant en colonnes les vecteurs d'une base adaptée de vecteurs propres, et on a la relation $P^{-1}AP = D$.

— Il faut savoir réécrire matriciellement les relations de récurrence pour une ou plusieurs suites.

— Pour inverser une matrice inversible, il suffit de connaître un polynôme annulateur dont 0 n'est pas racine.

— Pour calculer les puissances d'une matrice A, il suffit de connaître un polynôme annulateur P et le reste R_n dans la division euclidienne de X^n par P avant d'évaluer en A.

— Pour trouver un polynôme annulateur de A, il suffit de considérer χ_A, d'après Cayley-Hamilton.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in_n^{\mathcal{M}} (\mathbb{R})$ telle que $r = \mathrm{rg}(A) < n$.

1. Montrer que 0 est une valeur propre de A.

2. On note $E_{0,A}$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0. Exprimer $\dim(E_{0,A})$ en fonction de n et r.

3. Que dire de la multiplicité m_0 de la valeur propre 0 ?

Exercice 2 ☆

Déterminer les valeurs propres des matrices :

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 ☆

Dans chacun des cas de l'exercice précédent, déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres qui ont été obtenues. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 4 ☆☆ *diagonalisabilité sur* $\mathbb{C}$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 ☆

Lorsque cela est possible diagonaliser dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

II. Exercices

Exercice 6 ☆☆ *vecteurs propres*
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $v_1(-1;1;1)$ et $v_2(0;1;0)$ sont des vecteurs propres de f. A quelles valeurs propres sont-ils associés ?
2. Vérifier que $\mathrm{Ker}\, f$ est une droite vectorielle.
3. En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 7 ☆
Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que M est inversible ssi $0 \notin Sp_{\mathbb{R}}(M)$.
2. Montrer que M est inversible ssi M^2 est inversible.

Exercice 8 ☆☆
Soit E un e.v. de dimension finie $n = 2$ ou $n = 3$. Quelles peuvent être les valeurs propres d'une symétrie ? D'une projection ?

Exercice 9 ☆☆
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A) = 1$.

Justifier que 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$, puis que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, en précisant le spectre de A.

Exercice 10 ☆
Soit E un e.v. de dimension finie $n = 2$ ou $n = 3$. Quelles peuvent être les valeurs propres d'une homothétie ?

Exercice 11 ☆☆
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ et $tr(A) = n$. Démontrer que A est diagonalisable et que $A = I_n$.

Exercice 12 ☆☆
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
2. Calculer $\mathrm{tr}(A^n)$ en fonction de n.

Exercice 13 ☆☆
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_M de M.
2. Vérifier que pour $P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, les vecteurs colonnes sont des vecteurs propres de M associés aux valeurs propres $0, 3, 5$ dans cet ordre.
3. En déduire l'expression de M^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 ☆☆☆
Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que le polynôme caractéristique χ_M de M est $(X-1)^3$.
2. M peut-elle être diagonalisable ?
3. Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $MV_1 = V_1$, $MV_2 = V_2$ et $MV_3 = -2V_1 + V_2 + V_3$
4. En déduire que M est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. En déduire l'expression de M^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 15
Soit $M \in \mathcal{M}_n\mathbb{R}$ qui admet une valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Montrer que $\varphi : V \longmapsto \overline{V}$ est une bijection de $E_\alpha = \mathrm{Ker}(M - \alpha I_n)$ vers $E_{\overline{\alpha}} = \mathrm{Ker}(M - \overline{\alpha} I_n)$

III. Exercices avancés

Exercice 16 ✩✩ *CCP 2016, 2017*

Soit $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et
$E = \{M(a,b,c) \,/\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. On note $J = M(0,1,0)$. Calculer J^2. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, J et J^2.

2. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension ? Est-il stable par produit ?

3. La matrice J est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associés.

4. La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

5. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = c$.

6. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme associé à la matrice $M(a,b,c)$. Conditions sur a, b, c pour que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur ? Donner alors son image et son noyau.

Exercice 17 ✩✩✩

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que M est trigonalisable mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $MV_1 = 0$, $MV_2 = V_2$ et $MV_3 = V_1 + 2V_2 + V_3$
3. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$
   (a) Démontrer que $NM = MN$
   (b) Démontrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(N) \subset \{-1, 0, 1\}$
   (c) Résoudre l'équation $N^2 = M$ d'inconnue $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 18 ✩✩ *récurrence linéaire d'ordre 3*

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et la relation de récurrence :
$u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} + u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, où $X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \end{pmatrix}, \forall k \in \mathbb{N}$
2. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. En déduire Calculer u_p en fonction de p.

Exercice 19 ✩✩✩ *diagonalisation simultanée*

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et u et v deux endomorphismes diagonalisables de E.

Notons $s = \mathrm{Card}(Sp_{\mathbb{C}}(u))$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de u respectivement associés aux espaces propres $E_{\lambda_s,u}$.

On suppose que u et v commutent.

1. Que dire de la somme $E_{\lambda_1,u} + \cdots + E_{\lambda_s,u}$?
2. Soit $j \in [\![1, s]\!]$ Justifier que $E_{\lambda_j,u}$ est stable par v.
3. On suppose dans la suite que les sous-espaces propres de u sont tous des droites vectorielles. Comparer s et n. En déduire que les $v_{|E_{\lambda_j,u}}$ sont diagonalisable. Conclure alors que u et v sont diagonalisables **dans une même base**.

Exercice 20 ✩✩✩

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + 2I_n$. Montrer que $\mathrm{Det}(A) > 0$.

Exercice 21 ✩✩✩

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_3$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A)$ est un entier.

Exercice 22 ✩✩✩ *matrices de rang* 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $M = \mathrm{Tr}(M) I_n$.
2. Déterminer le spectre de M.
3. A quelle condition M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Notes

[4] correction :

[9] correction : théorème du rang puis trace

[13] correction : $\chi_A = X(X-3)(X-5)$ en développant par rapport à C_3

[14] correction : $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ a pour équation $x - 3y - z = 0$

Avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on calcule $-2V_1 + V_2$ et $MV_3 = -2V_1 + V_2 + V_3$ est équivalent à $x - 3y - z = 1$, on peut chioisir $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

[17] correction : $\chi_M = X(X-1)^2$, scindé donc trigonalisable

$v_1 = (1, -2, 0), v_2 = (0, 1, 0)$ $v_3 = (0, 0, 1)$ complète en une base de $\mathbb{R}^3$ et convient cal la 3ème colonne de M décompose ainsi $f(v_3) = (1, 0, 1) = v_3 + (1, 0, 0) = -2v_1 + v_2 + v_3$

$NV = \alpha V \Rightarrow N^V = \alpha^2 V = \lambda V$ donc $\alpha^2 = \lambda$ est v.p. de M.

Comme les sous-espace propres $E_0 = Vect(v_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(v_2)$ de M sont stables par N, donc pour la matrices de passage P qui trigonalise M, on a

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

en mettant au carré, $a^2 = 0, b^2 = 1$ et $d(a+c) = 1$ et $e(b+c) = 2$ et $c^2 = 1$ ce qui fait deux matrices $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ et son opposé, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou son opposé.

[18] correction : $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$ via la matrice $u_n = \alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma 3^n$

[20] correction : $P = X^3 - X - 2$ est annulateur, il possède une racine réelle, unique par TVI après tableau de variatons, $P = (X-a)(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ et le déterminant est $a^p|\alpha|^{2q} > 0$

[21] correction : $X(X-j)(X-\overline{j})$ est annulateur donc diagonalisable semblable à $(0_p, jI_q, \overline{j}I_q)$ avec $p + 2q = n$.

La trace est donc $p(j + \overline{j}) = -p$ entière

[22] correction : colonnes colinéaires donc a une colonne non nul C et sa colonne $C_i = \alpha_i C$ pour i de 1 à n.

On calcule $M^2 = \sum_k m_{ik}m_{kj} = \sum_k a_k c_i a_j c_k = (\sum_k c_k a_k) a_j c_i = \mathrm{Tr}(M)M$

$P = X^2 -^T r(M)X$ est annulateur de M donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, \mathrm{Tr}(M)\}$

Si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$ P est annulateur scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.

Sinon, 0 est la seule valeur propre, elle ne peut pas être diagonalisable, sinon elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle, ce qui serait impossible car le rang ne vaudrait pas 1

Conclusion : $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$ ssi M est diagonalisable