I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰✰

Dans $\mathbb{R}^3$ pour la norme $\| \ \|$ euclidienne usuelle, dessiner la boule fermée de centre $\Omega(1,1,0)$ et de rayon 2.

Exercice 2

En remarquant que $\| \ \|_\infty : M \mapsto \max\{|M_{ij}|,\ i,j \in [\![1,n]\!]\}$ est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, étant donnée une suite $(M_p)_p$ de matrices qui converge vers une limite M, comment peut-on quantifier cette limite, avec $\varepsilon > 0$?

Exercice 3 *Normes Vectorielles*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\|X\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|X\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$. On rappelle que $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes.

1. Montrer que :
$\forall X \in E,\ \|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty$
2. Montrer que :
$\forall X \in E,\ \|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty$

Exercice 4

On se place dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ et on note d la distance associée.

Montrer que la boule $B(A,r) = \{M \in E; d(A,M) < r\}$ est une partie ouverte de E, pour $A \in E$ et $r > 0$.

Exercice 5

On se place dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ et on note d la distance associée.

Montrer que la boule $B(A,r) = \{M \in E; d(A,M) < r\}$ est convexe pour $A \in E$ et $r > 0$.

II. Exercices

Exercice 6 ✰

Justifier que la suite $\left(\begin{pmatrix} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n & \dfrac{1}{n!} \\ \mathrm{e}^{-n} & \cos(n) \end{pmatrix}\right)_n$ est bornée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7 ✰

Justifier que la fonction $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{1}{1+\|(x,y)\|_2}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8 ✰

Démontrer que sur $\mathbb{R}^2$, l'application N de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant :
$\forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, N(x) = \max(|x_1+x_2|, |x_1|, |x_2|)$
est une norme, puis dessiner la boule fermée
$B_f(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2; N(x) \leq 1\}$.

Exercice 9 ✰✰

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

1. La suite de matrices $(M^n)_n$ converge t-elle ?
2. Soit $N = \lim\limits_{n\to\infty} M^n$. Que représente N ?
3. Déterminer N.
4. Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ telles que pour tout naturel n $X_{n+1} = MX_n$. La suite $(X_n)_n$ converge t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 10 ✰✰✰ *Norme matricielle*

On appelle trace d'une matrice carrée A d'ordre n le nombre noté $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ii}$ égal à la valeur de la somme des coefficients diagonaux d'une matrice.

1. Démontrer que l'application

$$(M,N) \longmapsto \mathrm{tr}(M^T \times N)$$

   définie un poduit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. En déduire que l'application

$$N : M \longmapsto \sqrt{\mathrm{tr}(M^T \times M)}$$

   définie une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11

Donner le domaine de continuité le plus grand possible de la fonction :
$f : (x,y) \mapsto y\sqrt{1-x^2}$

Exercice 12

Étudier la continuité en (0,0) de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On pourra condidérer $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,t)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,-t)$

Exercice 13

Étudier la continuité en (0,0) de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\cos\left(\dfrac{1}{xy}\right) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = \text{ si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

Exercice 14 ✰✰

Justifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 > y^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15 ✰✰

Justifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = 1+y\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16 ✰✰✰ *Fermé*

Justifier que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R});\ \det(M) = 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

III. Exercices avancés

Exercice 17 ✰✰

Justifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 > y^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18 ✰✰

Justifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = 1+y\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19 ✰✰✰ *Fermé*

Justifier que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R});\ \det(M) = 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 20

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On rappelle que : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t}$ et $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ sont des normes sur E.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et
$$f_n : t \longmapsto \begin{cases} 1-nt & \text{si} \quad t \in [0,1/n] \\ 0 & \text{si} \quad t > 1/n \end{cases}$$
Montrer que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$
3. Les normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 21 *Normes en dimension infinie*

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $N; f \longmapsto \int_0^1 e^x |f(x)|\mathrm{d}x$

1. Montrer que N est une norme.
2. pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$f_n : x \longmapsto \begin{cases} = & 1-nx & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ = & 0 & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \end{cases}$$
   (a) tracer les graphes de f_4 et f_{10}.
   (b) Déterminer les suites $(N(f_n))_n$ et $(\|f_n\|_\infty)_n$.
   (c) les normes N et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 22 ✰✰✰

Dans $\mathbb{R}^3$ pour la norme $\|\ \|$ euclidienne usuelle, calculer la distance du point $A(1,-1,1)$ au plan d'équation $x+z=0$, à l'aide d'une projection orthogonale.

Exercice 23 ✰✰

Soient F une partie fermée non vide d'un espace normé E et $x \in E$.

On note $d(x,F) = \inf\{\|x-y\|,\ y \in F\}$

1. si $x \in F$, justifier que $d(x,F) = 0$
2. Supposons que $d(x,F) = 0$
   (a) justifier l'existence d'une suite $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x-y_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$
   (b) Montrer que la suite y_n est convergente, vers une limite que l'on précisera.

(c) En utilisant le fait que F est une partie fermée, montrer que $x \in F$.

3. En déduire que

$$d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

Exercice 24 ✩✩✩✩

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

1. (a) Soient $a \in \bar{A}$ et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim a_n = a$, et $b \in \bar{A}$ et $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim b_n = b$
   Montrer que pour tout scalaire $\lambda \in [0,1]$, $\lambda a + (1-\lambda) b \in \bar{A}$
   (b) En déduire que $\bar{A}$ est convexe.

2. (a) Soient $a, b \in A^\circ$, et $r_a, r_b > 0$ tels que $B(a, r_a) \subset A$ et $B(b, r_b) \subset A$.
   En notant $r = \min(r_a, r_b)$, justifier que pour tout $x \in B(\lambda a + (1-\lambda)b, r)$, il existe $u \in B(0,1)$ tel que :
   $$x = \lambda a + (1-\lambda) b + ru$$
   (b) En remarquant que $a' = a + ru \in A$ et que $b' = b + ru \in A$, justifier que le segment $[a', b'] = \{ta' + (1-t)b'; t \in [0,1]\}$ est contenu dans A.
   (c) En déduire que $x \in A$
   (d) En déduire que $B(\lambda a + (1-\lambda)b, r) \subset A$
   (e) La partie A° est-elle convexe ?

Exercice 25 ✩✩ *fonctions höldériennes*

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\| \ \|$ une norme sur E. Soit $h : E \to E$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant : $\forall (x,y) \in E^2,\ \|h(x) - h(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha$. Montrer que h est continue sur E.

Exercice 26 ✩✩✩

Soient E un $\mathbb{R}$-e. v. n., a et b deux vecteurs non nuls de E, et pour tout t réel, $f(t) = \|at + b\|$;

a) prouver que f est continue et lipschitzienne ;

b) prouver que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$;

c) Prouver que l'ensemble des réels t tels que $at + b$ appartienne à la boule unité ouverte est soit vide soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 27 ✩✩✩, *pour les 5/2 : CCINP PC 2018*

On étudie

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \right\}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x,y) \in E$.

2. Montrer que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Notes

[1] correction : Utiliser la définition de boule fermée

[3] correction :

[5] correction :

[8] correction : préciser les bords

[13] correction : $x_n = y_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ donne $f(x_n, y_n) = 0$.

$x_n = y_n = \dfrac{1}{\sqrt{2(n\pi + \pi/2)}}$ donne $f(x_n, y_n) = 1$.