I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✫

On considère le couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$, dont la loi est donnée par :
$\mathbf{P}((0,0)) = 1/8$, $\mathbf{P}((0,1)) = 1/4$,
$\mathbf{P}((1,0)) = 3/8$, $\mathbf{P}((1,1)) = 1/4$.

1. Déterminer les lois marginales $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$, à l'aide d'un tableau.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 ✫✫

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli $b(1/2)$. Les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 ✫✫

Démontrer que si X, Y et Z sont trois variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $X+Y$ et Z sont indépendantes, en utilisant le lemme des coalitions.

Exercice 4 ✫✫ *Sondage*

Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue $p \in \,]0,1[$.
On choisit un échantillon de n personnes et l'on pose $X_i = 1$ si le i-ème individu présente la propriété étudiée, 0 sinon. On considère que les variables aléatoires X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent toute une loi de Bernoulli de paramètre p.
a) Quelle est la loi suivie par

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n\,?$$

b) Déterminer espérance et variance de S_n/n.
c) Soit $\varepsilon > 0$. Etablir

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

d) Pour $\varepsilon = 0,05$, quelle valeur de n choisir pour que S_n/n soit voisin de p à ε près avec une probabilité supérieure à 95 % ?

II. Exercices

Exercice 5 ✫✫✫

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathbf{P}\left(X = j, Y = k\right) = \frac{a}{2^{j+1}\,k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.
b) Reconnaître les lois marginales de X et Y.
c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 6 ✫✫✫ *Pièce*

On lance une pièce équilibrée plusieurs fois de suite. X est le rang pour lequel on obtient pour la 2ème fois « Pile ». On tire alors une boule dans une urne contenant $X-1$ boules numérotées de 1 à $X-1$ et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Montrer que X admet une variance et une espérance.
2. Déterminer la loi de Y à partir de la loi de Y sachant $\{X = k\}$.
3. Montrer que Y admet une variance et une espérance.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 7 ✩✩

Soient $\lambda, \mu > 0$. On note X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. A l'aide du théorème de transfert, justifier que $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$ et rappeler l'expression de $G_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2. Calculer G_{X+Y} et en déduire la loi de $X + Y$.
3. On note $(X_1, \ldots, X_n$ n v.a.i..d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n\lambda}}$
   (a) Déterminer le loi de S_n, son espérance et sa variance.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de T_n.

Exercice 8 ✩✩

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On note X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$.

1. Déterminer G_X et G_X les fonctions génératrices de$X$ et Y.
2. En déduire G_{X+Y}
3. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 9 ✩✩

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

1) Déterminer les fonctions génératrices de X et $3Y$.
2) En déduire la fonction génératrice de $Z = X + 3Y$.
3) En déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.
4) X et Z sont-elles indépendantes ?
5) Trouver le minimum de la fonction $t \mapsto \mathbb{V}(X + tY)$.

III. Exercices avancés

Exercice 10 ✩✩✩

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 11 ✩✩✩

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 12 ✰✰✰

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$, c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Exercice 13 ✰✰✰

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 14 ✰✰

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(S_n \geqslant 3p)$.

Exercice 15 ✰✰

Soit $\lambda > 0$. On note $(X_1, \ldots, X_n$ n v.a.i..d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n\lambda}}$

1. Déterminer le loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. En déduire l'espérance et la variance de T_n.
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe c_0 tel que :

$$\forall c \geq c_0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}[|T_n| \geq c] \leq \varepsilon$$

Exercice 16 ✰✰ *CCINP*

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de même loi. $Z = X + Y + 1$. On suppose que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$.

a) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

b) Trouver $G_X : t \mapsto \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

c) En déduire la loi de X.

Exercice 17 ✰✰✰ *Modèle d'assurance*

Des sinistres surviennent sur une année avec une probabilité $p \in]0,1[$. Chaque sinistre à un coût fixe de C pour l'assureur. Chaque client paye une prime annuelle d'assurance π.

1. Pourquoi peut-on modéliser par une famille $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ de N variables aléatoires de loi $b(p)$ les N clients d'un assureur ?
2. Quelle est l'espérance de S le solde annuel des sinistres pour l'assureur ?
3. Quelle est la variance de S ?
4. Donner une valeur de π la prime annuelle d'un assuré pour que l'assureur soit rentable une année avec une probabilité supérieure à 99%.

Exercice 18 ✰✰✰ *estimateurs statistiques*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.

On pose $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et

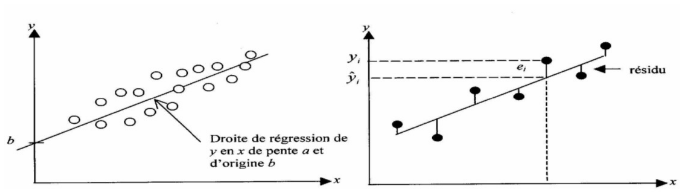
$\bar{V}_n = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$

a) Calculer espérance et variance de $\bar{X}_n$.

b) Calculer l'espérance de $\bar{V}_n$.

Exercice 19 ✰✰✰✰ *Modélisation par moindres carrés*

$$\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2.$$



Etant donné un n échantillon de mesures physiques $((x_i, y_i))_{1\leq i\leq n}$, on cherche à savoir si cet échantillon peut-être assimilé à des réalisations aléatoires de couples $((x_i, ax_i + b))_{1\leq i\leq n}$, pour des paramètres a et b de régression linéaire, selon une relation linéaire de la forme

$$y = a\,x + b$$

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1. Par définition, la droite de régression linéaire associée à ces mesures est la droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$, où $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^2$ telle que $\delta_n(\hat{a}, \hat{b}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{a}\,x_i - \hat{b}|^2$ réalise le minimum de la fonction $(a, b) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i - a\,x_i - b|^2$.
2. Justifier que résoudre ce problème revient à minimiser une quantité de la forme
$$f(V) = \|MV - Y\|_2^2 \qquad (\star)$$
avec $M = [X, U] \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
3. On note $\hat{Y}$ le projeté orthogonal de Y sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(M)$.
   (a) Pourquoi a-t-on $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(X, U)$?
   (b) Justifier que ce maximum est atteint et est unique.
   on utilisera la formule de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base orthonormée
   (c) Pourquoi a-t-on $\hat{Y} - Y \perp MV,\ \forall V \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?
   (d) On pose $\hat{V}$ tel que $M\hat{V} = \hat{Y}$. En déduire que : $\forall\, V \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ V^T M^T (Y - M\hat{V}) = 0$
   (e) En déduire que : $M^T(Y - M\hat{V}) = 0$
   (f) Montrer que $\det(M^T M) = n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^2$
   (g) Etablir que $\hat{V} = (M^T M)^{-1}\, M^T\, Y$.
4. On rappelle que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathbb{E}(X))^2$, $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y))^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbb{E}(Y))^2$ et $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mathbb{E}(X))(y_i - \mathbb{E}(Y))$
   On vérifie que :
   $$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots x_n & \end{pmatrix} Y$$
   $$= \frac{1}{n^2\mathbb{V}(X)}\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}.$$
   En déduire que l'équation de la droite des moindres carrées est obtenue pour les paramètres : $\hat{b} = \mathbb{E}(Y) - \hat{a}\,\mathbb{E}(Y)$ et $\hat{a} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathbb{V}(X)}$.
5. La droite des moindres carrées et obtenue pour des paramètres $\hat{a}$ et $\hat{b}$ et a pour équation cartésienne
$$y = \hat{a}x + \hat{b}$$
Interpréter l'alignement des points sur cette droites dans le cas d'une covariance nulle.

Notes

[1] correction :

$\mathbf{P}_X(0) = 1/8 + 2/8 = 3/8, \mathbf{P}_X(1) = 3/8 + 2/8 = 5/8, \mathbf{P}_Y(0) = 1/8 + 3/8 = 1/2, \mathbf{P}_Y(1) = 2/8 + 2/8 = 1/2$

Non, X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbf{P}((0,0)) = 1/8 \neq 3/8 * 1/2 = 3/16$

[2] correction : Non : X et Y suivent des lois de Bernoulli 1/2 $\mathbf{P}(\{X+Y=2\} \cap \{X-Y=0\} \neq \mathbf{P}(\{X+Y=2\})\mathbf{P}(\{X-Y=0\})$.

[4] correction : a)S_n soit une loi de Bernoulli de paramètres n et p.

b) Puisque S_n suit une loi de Bernoulli, $\mathrm{E}(S_n) = np$ et $\mathrm{V}(S_n) = np(1-p)$.

Par conséquent $\mathrm{E}(S_n/n) = p$ et $\mathrm{V}(S_n/n) = p(1-p)/n$

c) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $P(|Sn/n - \mathrm{E}(Sn/n)| > \varepsilon) \leq \mathrm{V}(Sn/n)/\varepsilon^2$

et donc $P(|Sn/n - p| > \varepsilon) \leq p(1-p)/(n\varepsilon^2)$

Enfin, l'inégalité classique $p(1-p) \leq 1/4$ permet de conclure.

d) On choisit n de sorte que $1/(4n\varepsilon^2) \leq 0,05$

La valeur $n = 2000$ est convenable.

[6] correction :

1. Pour $k \geq 2$: $P[X=k] = (k-1)2^{-k}$: choix du pile parmi les $(k-1)$ premiers lancers.

   $$E[X] = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)2^{-k} = \frac{1}{k}\frac{2}{(1-1/2)^3} = 4$$

   La série $\sum_{k\geq 2} k^2(k-1)2^{-k}$ CV et $E[X^2] = \sum_{k=2}^{+\infty} k^2(k-1)2^{-k} = \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)2^{-k} + 2\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)2^{-k} = \frac{1}{2^3}\frac{3!}{(1-1/2)^4} + 2\frac{1}{2^2}\frac{2!}{(1-1/2)^3} = 20$

   $V(X) = 20 - 4^2 = 4.$
2. sachant $\{X=k\}$, Y prend les valeurs $1\dots, k-1$, donc$Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   Pour $n \geq 1$, on a $P[Y=n] = \sum_{k=2}^{+\infty} P[X=k] \times P_{X=k}[Y=n] = \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)2^{-k} \times \frac{1}{k-1} = \frac{1}{2^{n+1}} \times 11 - 1/2 = (1-p)^{n-1}p$ pour $p = 1/2$

   Donc (loi géométrique) $E[Y] = 2, V[Y] = 2$
3. Non $P[(X=2) \cap (Y=3)] = 0$: pas d'indépendance !
4. $E[XY] = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} knP[(X,Y)=(k,n)] = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k-1} kn(k-1)\frac{1}{2^k}\frac{1}{k-1} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k}{2^k}\frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}E[X^2] = 10$

   $cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 10 - 4 * 2 = 2$

   $$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]V[Y]}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[10] correction :

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$P(Y=k)=\sum_{j=0}^{+\infty} P\left((X,Y)=(j,k)\right)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

Or, $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j\geqslant 1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}$ donc $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}\quad(*).\tag{$\star$}$$

De même, $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}$ donc $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}\quad(**).\tag{$\star\star$}$$

Donc, d'après (*) et (**), on en déduit que :
$P(Y=k)=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}+\dfrac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}=\dfrac{(\frac{1}{2}+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}$.
Pour des raisons de symétrie, X et Y ont la même loi et donc :
$X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall j\in\mathbb{N}$, $P(X=j)=\dfrac{(\frac{1}{2}+j)\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car :
$P((X,Y)=(0,0))=0$ et $P(X=0)P(Y=0)\neq 0$.

2. Posons $\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2$, $a_{j,k}=2^{j+k}P\left((X,Y)=(j,k)\right)$.
   On a $a_{j,k}=\dfrac{j+k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\dfrac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!}+\dfrac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.
   $\forall k\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{1}{\mathrm{e}k!}\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{(j-1)!}$ converge et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{1}{\mathrm{e}k!}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(j-1)!}=\frac{1}{k!}$.
   De même, $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}$ converge et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}=\frac{k}{\mathrm{e}\, k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}=\frac{k}{k!}$.
   Ensuite, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{k!}=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k-1)!}$ convergent. De plus $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!}=\mathrm{e}$.
   Donc la famille $(a_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
   On en déduit que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et $E\left[2^{X+Y}\right]=2\mathrm{e}$.

[11] correction :

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont mutuellement indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1-p$ (échec).
   La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binômiale de paramètres (n,p).
   C'est-à-dire $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Sous la condition $(X=i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

$$P(Y=k|X=i)=\begin{cases}\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k} & \text{si } k\in[\![0,n-i]\!]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

(b) $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(Y = k - i | X = i)P(X = i)$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$.

Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Donc $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.

Donc d'après le binôme de Newton, $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}$.

On vérifie que $1 - p(2-p) = (1-p)^2$ et donc on peut conclure que :
Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$.
Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :

$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{(k-i)!\,(n-k)!\,i!} = \frac{k!}{(k-i)!\,i!}\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}.$$

(c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, alors :
$E(Z) = np(2-p)$ et $V(Z) = np(2-p)\,(1 - p(2-p)) = np(2-p)(p-1)^2$.

12 correction :

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$.
$X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_i = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$.
Alors on a $P(X_i \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p\frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n$.
Donc $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leqslant n) = q^n$.
2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(Y > n) = P((X_1 > n) \cap \cdots \cap (X_N > n))$
Donc $P(Y > n) = \prod_{i=1}^{N} P(X_i > n)$ car les variables $X_1, \cdots, X_N$ sont mutuellement indépendantes.
Donc $P(Y > n) = \prod_{i=1}^{N} q^n = q^{nN}$.
Or $P(Y \leqslant n) = 1 - P(Y > n)$
donc $P(Y \leqslant n) = 1 - q^{nN}$.
Calcul de $P(Y = n)$:

Premier cas : si $n \geqslant 2$.
$P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n - 1)$.
Donc $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.
Deuxième cas : si $n = 1$.
$P(Y = n) = P(Y = 1) = 1 - P(Y > 1) = 1 - q^N$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.

(b) D'après 2.(a), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.
C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \left(1 - (1 - q^N)\right)^{n-1}(1 - q^N)$.
On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^N$.
Donc, d'après le cours, Y admet une espérance et $E(Y) = \frac{1}{1 - q^N}$.

15 correction : B-T, $1c^2 \leq 1/c_0^2 \leq \varepsilon$