

Méthodes à retenir :

- $G_X : t \mapsto \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X = n] t^n$ est définie sur $[-1, 1]$ au moins.
- Si le rayon de convergence de la série génératrice G_X de X variable aléatoire est $R > 1$, alors X admet des moments à tout ordre k , et $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$, $\mathbb{E}[X(X-1)] = G''_X(1)$, $\mathbb{E}[X(X-1)(\dots)(X-k+1)] = G_X^{(k)}(1)$,

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆ ☆

Un joueur dans un casino joue sur une machine qui renvoie un entier N dans \mathbb{N}^* selon la probabilité $\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}$.
Si n est pair le joueur gagne n jetons et si n est impair, le joueur perd n jetons.

1. Calculez la probabilité de gagner à ce jeu.
2. Soit G le gain algébrique du joueur ($G < 0$ si le joueur perd), donnez la loi de G .
3. espérance de G ?

Exercice 2 ☆

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ pour $p \in]0, 1[$ et $Y = f(X)$.

Déterminer l'image $Y(\Omega)$ et calculer les $\mathbb{P}(\{Y = k\})$ pour $k \in Y(\Omega)$

Exercice 3 ☆

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$ et $Y = f(X)$.

Déterminer l'image $Y(\Omega)$ et calculer les $\mathbb{P}(\{Y = k\})$ pour $k \in Y(\Omega)$

Exercice 4 ☆ ☆

Déterminer la valeur de $a > 0$ pour que l'on puisse définir une variable aléatoire discrète X à valeurs dans \mathbb{N}^* en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}[X = n] = \frac{a}{n(n+1)}$$

Exercice 5 ☆

A partir la fonction génératrice d'une variable X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, et $V(X)$.

II. Exercices

Exercice 6 ☆ ☆

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Calculer $\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-r+1)]$

III. Exercices avancés

Exercice 7 ☆☆ Mines-Télécom

On considère $S(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n$

1. Donner le rayon de convergence R de cette série.

2. Calculer $S(t)$ sur $] -R, R[$.

On se donne une variable aléatoire X telle que,
 $\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Que vaut λ ?

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 8 ☆☆☆ Centrale

On considère des lancers successifs d'une pièce ayant une probabilité p d'obtenir face et $q = 1 - p$ d'obtenir pile.

On se place dans un espace probabilisé (Ω, A, P) pour lequel F_n est un événement, où F_n : "on obtient face au n -ième lancer".

On note par ailleurs P_n : "on obtient pile au n -ième lancer" et E_n : "on obtient une suite de r faces consécutifs pour la première fois au n -ième lancer".

1. Exprimer E_0, \dots, E_{r-1} puis E_r en fonction des F_k .

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $E_{n+r+1} = \left(\bigcap_{j=n+2}^{n+r+1} F_j \right) \cap P_{n+1} \cap \left(\bigcap_{j=1}^n \overline{E_j} \right)$ en convenant $\bigcap_{j=1}^0 \overline{E_j} = \Omega$.

3. Montrer que E_n est un événement. On note alors $p_n = P(E_n)$

4. Écrire une fonction en python simulant l'expérience et renvoyant le temps d'attente de la première suite de r faces consécutifs.

5. a) Montrer que $\sum p_n$ converge. b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+r+1} = p^r q \left(1 - \sum_{k=1}^n p_k \right)$$

6. Exprimer p_{n+r+1} en fonction de p_{n+r}, p, q, p_n

7. Montrer que $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ est définie et continue sur $[-1; 1]$

8. Démontrer alors qu'on a :

$$\forall x \in [-1; 1], \frac{G(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_k \right) x^n$$

9. Exprimer enfin $G(x)$ à l'aide de la question 5.b).

Notes

² correction :

⁶ correction :

$$E[X(X-1)\dots(X-r+1)] = \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{k!}{(k-r)!} p(1-p)^{k-1}$$

$$\text{Or } \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r} = \frac{d^r}{dx^r} ((1-x)^{-r}) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

$$\text{Donc } E[X(X-1)\dots(X-r+1)] = \frac{(1-p)^{r-1} r!}{p^r}$$

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

$$G_X^{(r)}(t) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)t^X]$$

$$G_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$$