TP : Intégration numérique

Nous avons vu en TD les bases de l'intégration numérique, l'objectif de ce TP est de les mettre en oeuvre, de les tester et d'envisager quelques prolongements.

1 Mise en œuvre des méthodes vues en TD

1. Proposer des fonctions `methRectG`, `methRectD`, `methPtMilieu` et `methTrap` qui mettent en oeuvre les methodes des rectangles à gauche, à droite, du point milieu et des trapèzes pour fournir une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. En vous servant de la fonction `random` du module `random`, proposer une fonction `methMonteCarlo` qui fournit une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
3. La fonction de Runge est $\mathcal{R} : t \longmapsto \frac{1}{25+t^2}$, on va tester nos méthodes numériques pour estimer $\displaystyle\int_0^1 \mathcal{R}(t)\ \mathrm{d}t$.

   a) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^1 \mathcal{R}(t)\ \mathrm{d}t$.

   b) Proposer un graphique qui illustre les erreurs commises par les méthodes que vous avez programmé en fonction du nombres de points utilisés.

   c) Proposer un affichage du logarithme de l'erreur en fonction du logarithme du nombre de points. Qu'observez-vous ? Comment l'expliquer ?

Les méthodes issues de l'analyse numérique ont toutes un fonctionnement similaire basé sur le choix d'une méthode élémentaire. Il est possible de les programmer sous cette forme avec :
- — des fonctions `rectanglesG_elem`, `rectanglesD_elem`, `ptMilieu_elem` et `trapeze_elem` ;
- — une unique fonction qui construit la méthode composée.

Vous trouverez une telle version dans le corrigé, essayez de la réaliser vous-même au préalable.

2 Prolongement 1 : méthode de Simpson

1. On cherche une méthode élémentaire à trois points, c'est-à-dire que, pour cette question l'intervalle d'intégration est supposé « petit ». On procède de la façon suivante :
   - on va approcher $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ par une expression de la forme $\omega_0 f(a) + \omega_1 f(\frac{a+b}{2}) + \omega_2 f(b)$;
   - on veut que l'approximation soit exacte pour les polynômes de degré inférieurs à 2.

   a) On considère les polynômes $P_0 = 1$; $P_1 = X - \frac{a+b}{2}$; $P_2 = (X-a)(X-b)$. Dessiner l'allure de leurs courbes représentatives sur $[a;b]$.

   b) Justifier que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   c) Expliquer pourquoi, si la méthode est exacte pour P_0, P_1 et P_2 alors elle l'est pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

   d) Calculer $\int_{[a;b]} P_0$, $\int_{[a;b]} P_1$ et $\int_{[a;b]} P_2$.

   e) En déduire $\omega_0 = \ \omega_1 = \frac{1}{6}$ et $\omega_2 = \frac{4}{6}$.
2. Programmer la méthode d'intégration de Simpson.
3. Comparer la méthode de Simpson aux autres méthodes d'intégration numérique.
4. L'erreur dans la méthode de Simpson est en $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Cela correspond-il à l'observation ?

- — Vérifiez que la méthode élémentaire de Simpson est également exacte pour les polynômes de degré 3, mais pas pour ceux de degré 4.
- — Ce phénomène (dû à l'imparité) est commun à toutes les méthodes de Newton-Cotes : une méthode élémentaire construite avec $2n+1$ points est d'ordre $2n+1$. (Lorsqu'on utilise $2n$ points, on a une méthode d'ordre $2n-1$).

3 Prolongement 2 : méthode de Monte Carlo pour estimer la surface d'une ellipse

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la **conique** $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + 3y^2 = 1$. L'objectif de cette question est d'estimer la surface $\mathcal{S}$ délimitée par $\mathcal{C}$.

1. A l'aide de GeoGebra (ou d'un autre logiciel de géométrie), observer $\mathcal{C}$.
2. Soit les points $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(1,-1)$. Justifier que $\mathcal{S}$ est incluse dans le carré $ABCD$.
3. En prenant des points au hasard dans $ABCD$, proposer une méthode de Monte Carlo qui fournit une estimation de la surface $\mathcal{S}$.
4. Mettre en œuvre la méthode proposée à la question précédente et proposer une valeur approchée pour $\mathcal{C}$.
5. Refaire plusieurs fois le calcul, que constatez-vous ? Comment améliorer (un peu) la méthode ?

— Les ellipses, les paraboles et les hyperboles forment la famille des coniques. Ces courbes apparaissent naturellement comme les sections d'un cône (infini) avec un plan.

— Les ellipses apparaissent également en mécanique celeste comme approximation des trajectoires de planètes.